

ÖREBRO UNIVERSITET
Grundlärarprogrammet, inriktning 4-6
Matematik
Självständigt arbete i matematik, avancerad nivå 15hp
VT 2021



Vilken förståelse av bråk betonas i de nationella proven?

- En kvalitativ innehållsanalys av nationella prov i matematik.

Anton Nordstrand

Handledare: Per Nilsson

Which Understanding of Fractions does the National Tests Primarily test?

- **A Qualitative Content Analysis of the Swedish National Tests.**

Abstract

Fractions has for a long time been seen as one of the mathematic fields most difficult. Results from PISA and TIMMS has shown that swedish students lack enough knowledge of fractions. Results from PISA has for a long time been a hot topic in Sweden. Results from swedish national tests has been less focused on. Results from earlier studies suggests that students' difficulties with fractions might be because they tend to learn procedural knowledge unconstrained to conceptual knowledge. This study had the purpose to investigate the character of fraction based tasks in the swedish national tests in mathematic. With a qualitative content analysis, fraction based tasks were identified as either conceptual knowledge based or procedural knowledge based. The result shows that most fraction based tasks were conceptual knowledge based. 54% of the fraction tasks was testing both conceptual knowledge and procedural knowledge.

Keywords: Fractions, national tests, conceptual knowledge, procedural knowledge

Sammanfattning

Bråk har länge ansetts som ett av de områden i matematik som är svårast. Resultat från PISA och TIMMS har visat att svenska elevers bråkkunskaper är bristfällig. Resultat i PISA har under flera år varit ett hett ämne i Sverige. Resultat i nationella prov har diskuterats mindre. Resultat från tidigare studier har indikerat att en anledning till elevers svårigheter i bråk är att de lär sig procedurförmåga utan anknytning till begreppsförmåga i bråk. Denna studies syfte var att undersöka bråkuppgifters karaktär i de nationella proven i matematik. Studien använde sig av kvalitativ innehållsanalys för att klassificera bråkuppgifter i nationella prov huruvida de var begreppsförmågebaserade eller procedurförmågebaserade. Studiens resultat visar att fler uppgifter från proven var begreppsförmågebaserade än procedurförmågebaserade. 54% av bråkuppgifterna testade både begreppsförmåga och procedurförmåga.

Nyckelord: Bråk, nationella prov, begreppsförmåga, procedurförmåga

Innehåll

Inledning	1
Syfte och frågeställning	2
Litteraturgenomgång	2
Definition av begreppet bråk	2
Elevers möten med bråk i grundskolan	3
Elevers svårigheter och vanliga missuppfattningar med bråk	3
Missuppfattningarnas karaktär	4
De nationella provens roll och syfte	5
Svenska nationella prov i matematik	6
Elevers resultat i nationella prov	7
Tabell 1	8
Tabell 2	8
Tabell 3	8
Teoretisk ram	8
Begreppsförmåga och procedurförmåga	9
Begreppsförmåga och procedurförmåga i bråk	10
Metod	11
Metod för insamling av nationella prov	11
Metod för analys av nationella prov	12
Etiska överväganden	14
Validitet och reliabilitet	14
Resultatanalys	15
Hur stor del av de nationella proven består av bråkuppgifter?	15
Tabell 4	15
Figur 1	16
Figur 2	17
Figur 3	17
Figur 4	18
Figur 5	18
Figur 6	20
Vilken typ av förståelse för bråk betonas i de nationella proven?	20
Tabell 5	21
Figur 7	22
Diskussion	23
Resultatsammanfattning	23

Tabell 4	23
Tabell 5	24
Resultatdiskussion	24
Konsekvenser för lärarprofessionen	26
Metoddiskussion	27
Fortsatta studier	28
Referenser	29

Inledning

Bråk är ett komplext område i matematik och det har länge setts som ett område som är svårt för elever att förstå och svårt för lärare att undervisa (Lamon, 2007). Samtidigt ses förståelse för bråk som en betydande faktor för att senare klara av att utveckla goda aritmetiska och algebraiska förmågor (McIntosh, 2008). Förståelse för bråk i tidig ålder ses även ur ett längre perspektiv som en faktor för en individs möjligheter att studera på mer avancerad nivå i framtiden (Lamon, 2007; National Mathematics Advisory Panel, 2008). Det är således en betydelsefull del av elevens utveckling i matematik. Förståelse för bråk fungerar ofta som ett viktigt steg i elevens utveckling och det leder ofta till en djupare förståelse för matematik. Det kan dock även ha motsatt effekt. Att bråkräkning leder till svårigheter och missuppfattningar som blir bestående och därav problematiska både för elevens nuvarande och framtida förståelse i matematik (Hägglom, 2013).

De internationella undersökningarna TIMMS (1995, 2003, 2007) och PISA (2000, 2003, 2006, 2009) visar att svenska elevers kunskaper i bråk ser ut att vara mindre bra (Kilborn, 2014). Det ser därav ut som att bråkundervisning som främjar elevers förmågor i bråkräkning är något som kan utvecklas i den svenska skolan. Det är svårt att säga en enskild orsak varför det är så. Den här studien gör därför inget anspråk på att besvara den frågan. Ambitionen med studien är att visa och bidra med förståelse hur de nationella proven testar elevers bråkkunskaper och specifikt undersöka om någon av begreppsförmåga eller procedurförmåga betonas i proven.

De nationella proven är obligatoriska. Det betyder att alla elever i den svenska skolan gör nationella prov under skolgången. Det är således något som både elever och lärare behöver förhålla sig till. Proven var tidigare tänkt att fungera som ett utvecklingsinstrument men idag fungerar de mer som ett kontrollerande instrument för lärarens betygsättning (Lundahl, 2014). Syftet med ett alltmer kontrollerande nationellt prov är att proven skall bidra till en mer rättvis och likvärdig skola. Lärare tycks ha en positiv inställning till nationella prov. En del lärare menar att elevers resultat i nationella prov tenderar att bekräfta det som de redan visste om elevernas kunskapsnivå (Lundahl, 2014). Andra lärare har en positiv inställning till nationella prov då de anser att proven konkretiserar kunskapskraven på ett bra sätt (Skolverket, 2015). Det verkar således som att de nationella proven uppfyller sitt syfte att mäta och kontrollera kunskapskraven i grova drag.

Syfte och frågeställning

Syftet med studien är att undersöka vilken typ av förståelse för bråk som betonas i de nationella proven. För att undersöka detta har kvalitativ innehållsanalys tillämpats som metod för att analysera tre upplagor av nationella prov i matematik för årskurs 6. Studiens huvudsakliga forskningsfråga är fråga 2. Forskningsfråga 1 fungerar som en bakgrundsfråga som är en del av metoden för att kartlägga bråkuppgifternas karaktär i de nationella proven. Studiens syfte skall nås genom att besvara följande forskningsfrågor:

1. Hur stor del av de nationella proven består av bråkuppgifter?
2. Vilken typ av förståelse för bråk betonas i svenska nationella prov?

Litteraturgenomgång

I det här avsnittet kommer begreppet bråk att redogöras för. Det innebär att begreppet kommer att definieras och presenteras utifrån de sätt som det används i svensk grundskola och i svenska nationella prov i matematik. Även de nationella provens syfte och hur de nationella proven i matematik är utformade kommer att redogöras för i detta avsnitt. Avsnittet bidrar med förståelse för studiens studieobjekt och det innehåll som analyseras.

Definition av begreppet bråk

Ett bråk kan definieras som en kvot mellan två kvantiteter eller som en division (James & James, 1992). Det låter till en början enkelt men om begreppet bråk studeras lite djupare är det något mer komplicerat då det finns begrepp som är relaterade till bråk som uttrycker olika betydelser av bråk. Detta kommer att redogöras i detta avsnitt men först kommer en kort beskrivning av uttrycket bråk som det mest används i den svenska grundskolan. För att något ska vara ett bråk behöver det i huvudsak bestå av tre komponenter. Dessa är en täljare, en nämnare och ett bråkstreck.

- Täljare: uttrycket a i bråket $\frac{a}{b}$ är täljare.
- Nämnare: uttrycket b i bråket $\frac{a}{b}$ är nämnare.
- Bråkstreck: Bråkstreck kan skrivas både som ett vågrätt bråkstreck och som ett snett bråkstreck. Uttrycket i exemplet ovan kan därmed även skrivas som a/b (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Den definition av begreppet bråk som har givits här är den definition som den här studien använder. Det som på svenska vanligtvis kallas för decimaltal kan även kallas decimalbråk men studien intresserar sig specifikt för bråk och inte decimaltal.

Elevers möten med bråk i grundskolan

Barns första möten med bråk är ofta begränsad till att handla om halvor och fjärdedelar och det kan till en början se enkelt ut. Om en hel pizza delas i fyra lika stora delar utgör varje enskild del $\frac{1}{4}$. Om samtliga delar läggs ihop bildar de $\frac{4}{4}$ som är detsamma som en hel (Hägglom, 2013). Om en person äter tre av dessa fyra delar har personen ätit $\frac{3}{4}$ av pizzen och $\frac{1}{4}$ av pizzen är kvar. Den modellen för att förstå bråk kallas för del av helhet och det är en vanlig framställning av bråk som görs i skolan. En annan vanlig framställning av bråk i skolmatematik är del av antal. Om tre av fyra bollar i en låda är röd och den fjärde bollen är blå är $\frac{3}{4}$ av antalet bollar röd. $\frac{1}{4}$ av antalet bollar är blå. Nämnaren i bråket $\frac{3}{4}$ uttrycker då det totala antalet bollar medan täljaren uttrycker antalet röda bollar. Ett bråktal som $\frac{3}{4}$ kan vara applicerbart även om det finns fler bollar i lådan så länge bollarnas förhållande är detsamma, till exempel om 12 av 16 bollar är röda (Hägglom, 2013).

Även om del av helhet och del av antal är de vanligaste modellerna i svenska läromedel är det värt att nämna att bråk även används för att uttrycka både proportionalitet och förhållande. När ett bråktal uttrycks som ett förhållande, sker det ofta i förhållande mellan två olika enheter. Det kan till exempel handla om att en kostnad är proportionell i förhållande till antal kilogram. Dock används ofta procent i samband med proportionalitet (Hägglom, 2013).

Elevers svårigheter och vanliga missuppfattningar med bråk

Bråk är ett område där det sker missuppfattningar och elever möter svårigheter. En vanlig svårighet med bråk är att elever tenderar att använda samma logik de använt för att förstå heltal (Alkhateeb, 2019; Loc, Thong & Chau, 2017; Aliustaoglu, Tuna & Biber, 2018). Detta bidrar bland annat till missuppfattningen att desto högre tal som står som täljare och nämnare indikerar ett större bråktal än ett bråktal där siffrorna i täljaren och nämnaren är lägre. Det stämmer om skillnaden mellan täljaren och nämnaren är lika stor och bråktalet utgör ett mindre tal än 1. Till exempel är $\frac{99}{100}$ ett större bråktal än $\frac{9}{10}$ men $\frac{4}{10}$ är ett större bråktal än $\frac{30}{100}$ även om siffrorna i det sistnämnda bråktalet är högre, $\frac{100}{99}$ är dock ett mindre bråktal än $\frac{10}{9}$. En del av de vanliga missuppfattningarna kring bråk handlar om nämnaren och täljaren. Dessa

missuppfattningar bidrar bland annat till svårigheter att förstå och jämföra olika bråktals storlek (Mohyuddin & Khalil, 2016). En vanlig missuppfattning är att elever tror att desto mindre skillnad det är mellan bråktalets täljare och nämnare, desto mindre är bråktalet. En annan vanlig missuppfattning är att om talet i nämnaren är högt är bråktalet litet (Aliustaoglu et al., 2018). Bråk är komplext och svårigheterna är många. Att om siffran i nämnaren är högt är bråktalet litet bör dock ses som begriplig missuppfattning då det ofta stämmer. Det beror dock på vilket tal som står i bråktalets täljare och det är en typ av missuppfattning som visar att förståelse för täljare, nämnare och dess relation gentemot varandra är viktig för att förstå bråk. I en australiensk studie där elever jämförde storleken på olika bråktal framkom även missuppfattningen att två bråk är lika stora om skillnaden mellan täljaren och nämnaren är lika stor i de båda bråktalen, till exempel $\frac{2}{3}$ och $\frac{4}{5}$. En missuppfattning som enligt studiens författare beror på att elever inte förstår eller tar hänsyn till nämnarens storlek. Elever förstår därav inte förhållandet mellan täljaren och nämnaren och kan därför inte avgöra storleken på de delar som bråktalen uttrycker (Clarke & Roche, 2009).

Ett bråktal kan stå för mycket och presenteras i form av olika representationsformer som till exempel en figur, som ett tal eller förekomma i text. Ett bråktal kan även uttrycka olika saker som till exempel del av helhet, del av antal eller som en andel av något beroende på vilket sammanhang bråktalet används. Ett sammanhang som elever generellt tycks ha svårt att begripa bråk är när det presenteras som ett tal i förhållande till en tallinje (Tunc-Pekkan, 2015).

Missuppfattningarnas karaktär

Tidigare forskning har även visat att det ibland kan vara svårt att se elevers missuppfattningar om bråk. En anledning till detta är att elever tenderar att lära sig strategier som fungerar för att lösa en del specifika bråkuppgifter men strategin i sig är felaktig (Clarke & Roche, 2009). En sådan strategi kan till exempel vara att tänka på hur stor skillnaden mellan täljaren och nämnaren är. Elever resonerade till exempel att $\frac{4}{5}$ var ett större bråk än $\frac{4}{7}$ då gapet mellan täljaren och nämnaren är mindre i det förstnämnda. Svaret blir korrekt med just dessa bråktal men strategin är problematisk då en del av dessa elever resonerade att två andra bråk var lika stora då gapet mellan täljaren och nämnaren var lika stort, vilket blev fel (Clarke & Roche, 2009). Elevernas resonemang visar på bristande begreppsförmåga då de till exempel inte förstår att $\frac{2}{3}$ är ett större bråktal än $\frac{1}{2}$ eller att desto lägre nämnare desto större är varje del som täljaren uttrycker.

Även de missuppfattningar som elever har på grund av att bråktal förväxlas med heltal visar på bristande begreppsförmåga. Att lägre siffror indikerar lägre tal och att högre siffror indikerar ett högre tal är en logik som ej alltid fungerar för att förstå bråk.

Procedurförmåga och begreppsförmåga kommer att beröras mer i denna studies teoriavsnitt. Det är dock värt att nämna redan här dessa förmågor och hur de relaterar tillvarandra är något som har diskuterats och forskats om under lång tid. Förmågorna kompletterar varandra och de är ibland svåra att separera från varandra (Hiebert & Leferve, 1986). Författare till en relativt ny studie hävdar dock, utan att slå fast att bristande begreppsförmåga i bråk kan vara en förklaring till att många svårigheter och missuppfattningar förekommer. De menar att det är en trolig förklaring är att svårigheter och missuppfattningar snarare beror på bristande begreppsförmåga snarare än bristande procedurförmåga. Författarna till studien menar även att dessa förmågor kan vara dubbelriktade, det vill säga att det går att utveckla en förmåga oberoende av den andra (Braithwaite, Tian & Siegler, 2017).

De missuppfattningar som har nämnts i detta avsnitt knyter an till bristande begreppsförmåga snarare än bristande procedurförmåga. Det är för att begreppsförmåga handlar om att förstå bråktal i ett givet sammanhang i högre utsträckning än vad procedurförmåga gör. Då procedurförmåga i hög utsträckning handlar om att räkna med bråk snarare än att värdera, omvandla och jämföra olika bråk i olika sammanhang är det inte konstigt att fler missuppfattningar knyter an till begreppsförmåga. Det betyder dock inte att det inte finns svårigheter med bråk som är kopplade till procedurförmåga.

De nationella provens roll och syfte

Ett nationellt prov är ett obligatoriskt prov. Det betyder att alla personer som går igenom det svenska skolsystemet gör nationella prov under sin skolgång. Det betyg som en elev får på ett nationellt prov skall beaktas när slutbetyget sätts och enligt lärare läggs mycket arbete och tid på de nationella proven (Skolverket, 2015). Att nationella prov spelar roll inom svensk skola är därmed en självklarhet. Frågan är då vilken typ av roll de nationella proven har. Vad är syftet med proven, vad ryms i proven och vad är effekterna av dessa obligatoriska prov?

Ett syfte med de nationella proven är att de ska bidra till en mer likvärdig bedömning (Lundahl, 2014). Proven och de elevresultat som framkommer av de genomförda proven fyller en kontrollerande funktion av lärares betygsättning. De nationella proven bidrar på så sätt till en något mer centraliserad bedömning då provens resultat ska beaktas när elevens

slutbetyg ges. Enligt lärare bjuder dock provresultaten sällan på några överraskningar. Det är vanligare att resultaten stärker det som lärare redan trodde kring elevens kunskapsnivå (Lundahl, 2014; Skolverket, 2015). Ett annat syfte med de nationella proven är att de ska fungera som ett utvecklingsinstrument. Det var från början det huvudsakliga syftet och även om det syftet finns kvar fyller proven numer ett något mer kontrollerande syfte (Lundahl, 2014).

Enligt lärare ”konkretiserar” de nationella proven läroplanen och kunskapsmålen på ett bra sätt (Skolverket, 2015). Det tycks därmed vara så att innehållet i proven är relevant utifrån läroplanen och de kursmål som finns. Även om de nationella proven är omfattande sett till ämnesinnehåll innebär ett prov ett begränsat utrymme. Det är då intressant att undersöka vad innehållet består av och hur omfattande provet är.

Svenska nationella prov i matematik

De nationella proven konstrueras av olika svenska universitet beroende på ämne. Proven i matematik konstrueras av PRIM-gruppen som är en del av Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik på Stockholms universitet.

De nationella proven i matematik för årskurs 6 består av totalt fem delprov. Dessa delprov är delprov A, B, C, D och E. Delprov A är ett muntligt prov som testar elevers kunskaper i geometri samt förmåga att resonera. Eleverna skall till exempel beskriva olika geometriska figurers egenskaper och även jämföra figurers omkrets och area. Detta delprov behandlar endast geometri och testar inte elevers förståelse för bråk. Dessa prov har därför inte analyserats i denna studie. I övrigt har de andra delproven för årgångarna 2013/14, 2014/15 och 2015/16 analyserats. I detta avsnitt presenteras en kort genomgång av delprovets innehåll.

Delprov B är ett prov som genomförs skriftligt. Det finns inslag av geometri i dessa prov men delprovet testar i huvudsak elevers taluppfattning och räkneförmåga. En del uppgifter är utformade som problemlösningsuppgifter som presenteras i text men även rena räkneuppgifter i form av uppställning eller ekvationslösningar förekommer. Även uppgifter där eleven skall jämföra storlek av tal förekommer. Provet genomförs utan miniräknare och provtiden är 40 – 60 min.

Delprov C genomförs skriftligt. Provet består endast av uppgifter som presenteras i text. Uppgifter som förekommer i delprovet är till exempel att avgöra hur mycket klockan blir efter ett visst antal minuter från ett givet klockslag, ange temperaturskillnaden i °C från en dag till

en annan och att läsa av diagram och tabeller. Att läsa av en karta och förstå skala förekommer också i proven och likaså att omvandla utländsk valuta till svenska kronor. Till exempel en brasiliansk real är värd 3 kr, hur många kronor kostar fyra visselpipor om en visselpipa kostar 3,15 real. Area förekommer i delprov C från år 2015/16 men inte i delprov C från varken 2013/14 eller 2014/15. Eleven skall ha tillgång till miniräknare vid genomförandet och provtiden är 60 – 80 min. Uppgifterna är samlade kring ett tema. Temat skiljer sig beroende på provet årgång.

Delprov D är ett prov som likt delprov C endast innehåller uppgifter som presenteras i textform. Proven handlar bland annat om att räkna med enheter och volymer som till exempel meter, centimeter, deciliter och centiliter. Det förekommer även uppgifter där elever ska räkna med pengar och till exempel omvandla en valuta till svenska kronor. I dessa prov förekommer även uppgifter som handlar om procent och bråk. Sannolikhet förekommer i vissa upplagor av detta delprov men inte i alla. Eleven skall ha tillgång till miniräknare vid genomförandet och provtiden är 60 – 80 min. Uppgifterna är samlade kring samma tema som delprov C.

PRIM-gruppen själva beskriver att delprov E består av en mer omfattande uppgift och att eleven skall ha tillgång till miniräknare. Provtiden för detta delprov är 40 – 60 min.

Den mer omfattande uppgiften skiljer sig en del beroende på vilken årsupplaga man tittar på. Tabeller förekommer i samtliga upplagor men de behandlar olika teman. Delprov E från 2013/14 handlar om mönster och kvadrater. Eleven ska utifrån ett givet mönster lista ut area och sidors längd på figurer. Att fylla i en tabell är en del av denna omfattande uppgift. Delprov E från 2014/15 handlar om statistik. Eleven skall till exempel läsa av två frekvenstabeller och svara på frågor utifrån tabellen. På en av deluppgifterna ska eleven göra ett stapeldiagram utifrån en av frekvenstabellerna. På en annan deluppgift ska eleven ange vilket cirkeldiagram som visar ett givet undersökningsresultat. Delprov E från 2015/16 handlar om priser på olika sorters äpplen. Eleven ska till exempel fylla i en påbörjad tabell som visar vikt (kg) och pris (kr). Provet består även av att rita diagram som visar hur priset förhåller sig till antalet kg. Provet består även av en uppgift som handlar om att läsa av liknande diagram för andra frukter och ange vilket diagram som illustrerar vad.

Elevers resultat i nationella prov

Dessa tabeller visar elevers resultat i de nationella proven. Resultaten kommer från samma årgångar som har analyserats i denna studie och statistiken är hämtad från svensk offentlig statistik via skolverket.se.

Tabell 1

Andel elever (%) som erhållit respektive provbetyg från de nationella proven i matematik läsåret 2013/14.

Betyg	<i>F</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
Andel	9,1	22,4	23,8	21,0	12,2	11,5

Tabell 2

Andel elever (%) som erhållit respektive provbetyg från de nationella proven i matematik läsåret 2014/15.

Betyg	<i>F</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
Andel	8,4	25,7	24,6	20,7	11,4	9,3

Tabell 3

Andel elever (%) som erhållit respektive provbetyg från de nationella proven i matematik läsåret 2015/16.

Betyg	<i>F</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
Andel	9,2	22,9	23,0	20,1	15,2	9,7

Elevers prestationer på de nationella proven säger ingenting om elevers prestationer i relation till bråk. Kartlagd statistik på hur det gått för svenska elever i de nationella proven hade varit önskvärd. Sådan statistik har ej hittats. Tabellerna visar hur stor andel elever som erhållit respektive provbetyg för de prov som har analyserats i denna studie.

Teoretisk ram

I detta avsnitt kommer de teoretiska utgångspunkterna för studien att redogöras för. Den teoretiska ramen bygger på distinktionen att begreppsförmåga och procedurförmåga är två olika förmågor med olika funktioner. Distinktionen används för att tala om matematisk kunskap generellt, men kan även användas för att tala om kunskaper inom bråk. I den här studien används distinktionen främst för det sistnämnda. Avsnittet inleds med en beskrivning av förmågorna i generella termer. Avsnittet avslutas med en redogörelse för hur förmågorna kan appliceras på förståelse av bråk. Den teoretiska ram som presenteras i avsnittet har

fungerat som en grund för innehållsanalysen av de nationella proven. De bråkuppgifter som förekommer i de nationella proven har kategoriserats som antingen begreppsförmågebaserade uppgifter eller procedurförmågebaserade uppgifter.

Begreppsförmåga och procedurförmåga

Begreppsförmåga och procedurförmåga är två olika förmågor och även om de ibland överlappar med varandra är det nödvändigt att göra en distinktion för att tydliggöra vad som är vad. Det är skillnad på att lyckas utföra en uppgift och att fullt ut förstå uppgiften och varför den specifika lösningen fungerade. Det är ett exempel på skillnaden mellan de två förmågorna då procedurförmåga kallas för förmågan som beskriver hur något görs medan begreppsförmågan har kallats för förmågan som beskriver varför något görs (Hiebert & Leferve, 1986; Hallet, Nunes & Bryant, 2010).

Begreppsförmåga handlar om att förstå något. De kan sammanfattas som en förmåga att sammanlänka olika bitar av information med varandra för att förstå en helhet (Hiebert & Leferve, 1986). Denna sammanlänkning kan dels ske genom att två bitar av information som en elev redan har i minnet kopplas samman. I sådana fall utvecklas en förståelse om de två komponenternas samhörighet gentemot varandra, en förståelse som inte fanns innan den så kallade sammanlänkningen. Detta är ett exempel på när begreppsförmåga utvecklas. Ett annat exempel på när sådan utveckling sker är en ny bit av information som inte finns i elevens minne sammanlänkas med den information som redan finns i elevens minne. På så sätt sammanlänkas ny kunskap med befintlig kunskap och skapar på så sätt en större helhetsförståelse (Hiebert & Leferve, 1986). Ett konkret exempel när detta sker kan till exempel vara när en elev lär sig att räkna addition. För att klara av att bemästra den nya kunskapen behöver flera komponenter sammanlänkas. Komponenterna i det här fallet är elevens redan befintliga kunskap om tallinjen och siffrornas betydelse som sammanlänkas med den nya informationen om additionstecknets funktion. Detta är ett exempel när ny kunskap konstrueras och begreppsförmåga utvidgas. Samma exempel fungerar även som en illustration av att procedurförmåga ibland är beroende av begreppsförmåga då proceduren att räkna addition kräver viss förförståelse, alltså begreppsförmåga. Begreppsförmåga innefattar även taluppfattning.

Procedurförmåga handlar dels om att förstå syntax och korrekt sammansättning av matematiska symboler. Det innebär till exempel att man förstår att $1+1=2$ är en korrekt sammansättning medan $++=+$ ej är korrekt. Procedurförmåga handlar även om att behärska

specifika procedurer som till exempel att utföra en algoritmisk uträkning i korrekt ordning eller lösa en ekvation (Hiebert & Leferve, 1986).

Begreppsförmåga och procedurförmåga i bråk

När det kommer till bråkräkning, innebär begreppsförmåga att förstå vad begreppet bråk betyder. Det innebär förståelse för de matematiska symbolernas betydelse och storleken av olika enheter (Siegler, Fazio, Bailey & Zhou, 2013). Till exempel att nämnaren är det som indikerar helhet i principen del av helhet medan täljaren indikerar antalet delar av helhet. Samtidigt kan täljaren i ett annat sammanhang indikera delar av antal medan nämnaren i det sammanhanget symboliserar det totala antalet. Procedurförmåga i bråkräkning handlar å andra sidan om att behärska de fyra räknesätten i bråkräkning (Siegler et al., 2013). I ett sådant exempel är det enkelt att göra distinktionen mellan dessa exempel. Att behärska multiplikation av två bråk innebär att man förstår hur man ska göra för att lösa en sådan matematikuppgift. Det är möjligt att lära sig utan att ha den begreppsliga förmågan att förstå varför man gör så eller förstå att produkten i multiplikationen är ett bråk som är mindre än de bråk som multiplicerades med varandra. Till exempel att $\frac{1}{2}$ multiplicerat med $\frac{1}{2}$ är $\frac{1}{4}$. Begreppsförmågan i detta exempel är i stället att förstå vad bråktalen betyder och att $\frac{1}{4}$ är mindre än $\frac{1}{2}$. Att jämföra storlek av bråk är därav en prövning för begreppsförmågan snarare än procedurförmågan. Att utföra uträkningen $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ bevisar således procedurförmåga men uträkningen i sig bevisar inte begreppsförmåga.

Ett annat exempel på vad begreppsförmåga i bråk kan innebära är att förstå att två olika bråk med olika täljare och nämnare kan vara likvärdiga. Till exempel är $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ och $\frac{3}{9}$ tre olika men likvärdiga bråk som uttrycker ett och samma rationellt tal (Lamon, 2007).

Begreppsförmåga innebär som tidigare nämnts att se relationen som olika bitar har gentemot varandra. Ungefär som ett lapptäcke där en ny bit sys ihop med de bitar av tyg som redan sitter ihop innebär begreppsförmåga i matematik att länka samman ny kunskap med den kunskap man redan har. I förståelse för bråk kan det innebära att befintlig kunskap av en representationsform länkas samman med ny kunskap för att förstå en annan representationsform. Det kan till exempel innebära att en elev med god begreppsförmåga kan färglägga $\frac{3}{4}$ av en cirkel röd och $\frac{1}{4}$ blå och sedan använda den kunskapen för att fylla en tillbringare med $\frac{1}{4}$ saft och $\frac{3}{4}$ vatten. En elev som klarar av att rita cirkeln men inte vet hur hen

skall göra för att blanda saft är en elev som inte lyckas sammanlänka den befintliga kunskapen av en representationsform till den för eleven nya typen representationsform. Eleven lyckas således inte koppla de två representationsformerna till varandra. Begreppsförmåga innebär således en förståelse av de relationer som finns mellan olika representationsformer (Hägglom, 2013). Sammanfattningsvis handlar begreppsförmåga om att koppla ihop olika komponenter av kunskap eller information. Det kan innebära att en elev sorterar och gör kopplingar mellan olika delar från sin repertoar av befintlig kunskap för att lösa en uppgift. Det kan även innebära att eleven använder sin befintliga kunskap för att koppla ihop med något nytt.

Avslutningsvis skall det även sägas att det går att skilja på svårigheter och vanliga missuppfattningar med bråk utifrån procedurförmåga och begreppsförmåga. Svårigheter att räkna bråk med de fyra räknesätten ses som svårigheter kopplade till procedurförmåga. Det gäller oavsett om de bråktal som används i processen har samma eller olika nämnare eller täljare. Detta då det handlar om procedurer och även att förstå sammansättningar av olika matematiska symboler. Exempel på svårigheter och missuppfattningar som är kopplade till begreppsförmåga är till exempel att förstå bråktal i förhållande till en tallinje eller att uppskatta och jämföra storlek på olika bråk. När ett bråktal behövs förstås i ett sammanhang är det mer kopplat till begreppsförmåga.

Metod

I det här avsnittet kommer studiens tillvägagångssätt att redogöras för. Det berör allt som stegvis har genomförts i studien från datainsamling till varför kvalitativ innehållsanalys av nationella prov valdes som metod och vad den metoden innebär. Även etiska överväganden kommer att redogöras för i avsnittet, samt hur validitet och reliabilitet har säkerställts under arbetets gång.

Metod för insamling av nationella prov

Från början var tanken att analysera de tre senaste upplagorna av nationella prov som har genomförts i svensk skola (2016/2017, 2017/2018 & 2018/2019) men efter kontakt med Primgruppen på Stockholms universitet visade det sig svårt att få tillgång till de upplagorna. De skulle dessutom vara komplicerat att skriva om de upplagorna då de fortfarande står under sekretess. De nationella prov som slutligen blev valda för analys blev i stället upplagorna 2013/2014, 2014/2015 och 2015/2016 då dessa var de tre senaste som var tillgängliga och inte längre under sekretess när initiativet till denna studie togs. Att välja dessa prov blev således

ett praktiskt urval då de var lättillgängliga och de gav möjlighet att använda direkta exempel från proven i resultatanalysen.

Delprov A är ett muntligt delprov av de nationella proven och detta delprov fanns inte tillgängligt på Stockholms universitets hemsida. Dessa delprov har därav inte analyserats. Dessutom handlade dessa delprov inte om bråk. De delprov som har analyserat är således delprov B, delprov C, delprov D och delprov E.

Metod för analys av nationella prov

För att besvara studiens forskningsfrågor och nå dess syfte tillämpades innehållsanalys av nationella prov som metod. En innehållsanalys kännetecknas av systematiskt och strukturerat arbete som går ut på att klassificera data (Eriksson Barajas, Forsberg & Wengström, 2013). I den här studien fungerade den teoretiska ramen som ett underlag för att klassificera och identifiera kategorierna i de nationella provens innehåll. Analysen av data skedde systematiskt i två steg.

I det första steget identifierades uppgifter som handlade om bråk. Detta gjordes för att kartlägga vilka uppgifter som handlade om bråk i varje enskilt prov och för att besvara studiens första forskningsfråga. Genom att göra detta framkom det vilka uppgifter i de nationella proven som var bråkuppgifter och det förenklade sedermera analysen av bråkuppgifternas karaktär och vilken förmåga som uppgifterna testade. Detta gjordes genom att systematiskt granska varje enskild uppgift i varje enskilt prov och klassificera dem som antingen *bråkuppgift* eller *ej bråkuppgift*. I det här avsnittet ges exempel på uppgifter som klassificerades som bråkuppgift samt motivering varför de klassificerades som bråkuppgift. Det gäller även uppgifter som kategoriserades som ej bråkuppgifter. Uppgift 12 från delprov B från det nationella provet 2013/14 är ett tydligt exempel på en bråkuppgift. I den uppgiften skulle eleven ringa in det största talet av $\frac{3}{7}$ eller $\frac{5}{9}$. Uppgift 30 a från det nationella provet 2013/14 är ett exempel på en uppgift som klassades som en icke bråkuppgift. I den uppgiften skulle eleverna rita en figur. En del uppgifter var svårare att klassificera. Uppgift 6b från delprov B år 2013/14 är ett exempel på en sådan uppgift. I den uppgiften delades ett äpple i fyra lika stora bitar och eleven skulle räkna ut hur mycket en bit vägde. Äpplet vägde 196 g. Att räkna $\frac{196}{4}$ innebär inte per automatik att eleverna räknar med bråk och det går därför argumentera att det inte är en bråkuppgift. Uppgiften handlar dock om att räkna ut en fjärdedel av ett objekts vikt och det går därför argumentera för att det är en bråkuppgift då

bråket $\frac{1}{4}$ finns med i beskrivningen av uppgiften även om det inte är som ett rent bråktal.

Uppgiften klassades därför som bråkuppgift. Den här delen av metoden för analys resulterade sedermera i insamlade data av bråkuppgifter.

För att en uppgift skulle klassificeras som en bråkuppgift behövdes ett av följande kriterier uppfyllas.

- En uppgift är en bråkuppgift om bråk förekommer i beskrivningen av uppgiften.
- En uppgift är en bråkuppgift om bråktal förekommer som svarsalternativ i en uppgift som innehåller flera svarsalternativ. Detta innebär även att en uppgift där eleven instrueras att omvandla ett tal till bråkform är en bråkuppgift.
- Uppgiften handlar om sannolikhet där bråk ter sig som det lämpligaste tillvägagångsättet för att lösa uppgiften, till exempel uppgifter som berör tärningskast eller snurra på lyckohjul.
- Uppgiften kan enklast lösas genom att använda bråk i lösningen av uppgiften.

Det andra steget var att klassificera dessa bråkuppgifter huruvida de testade elevens begreppsförmåga, procedurförmåga eller testade dem båda. Det blev således två olika analysprocesser där kategorierna som identifierades i det första steget var bråkuppgifter och ej bråkuppgifter. I det andra steget identifierades kategorierna begreppsförmåga och procedurförmåga utifrån den data som kategoriserats som bråkuppgifter i det första steget. Den här metoden för att samla in och klassificera data kallas för kategorisering (Fejes & Thornberg, 2015).

För att en bråkuppgift skulle klassificeras som en begreppsförmågebaserad uppgift behövdes ett av följande kriterier uppfyllas.

- Uppgiften handlar om att omvandla tal, antingen från bråktal till något annat eller från något annat till bråktal, till exempel omvandla procent, decimaltal och bråk. Även uppgifter som handlar om att skriva bråk utifrån beskrivningar som ”var fjärde fisk i akvariet var guldfiskar, hur många guldfiskar var det?”.
- Uppgiften handlar om att jämföra olika bråk.
- Uppgiften handlar om sannolikhet där bråk är ett lämpligt tillvägagångsätt för att lösa uppgiften. Till exempel uppgifter som berör tärningskast eller snurra på lyckohjul.

För att en uppgift skulle klassificeras som en procedurförmågebaserad uppgift behövdes ett av följande kriterier uppfyllas.

- Uppgiften handlar om att använda något av de fyra räknesätten för att räkna med bråk. Till exempel addera, subtrahera, multiplicera eller dividera olika bråk.

Det räcker med att ett kriterium uppfylls för att en uppgift skall klassificeras inom en kategori. En uppgift kan klassificeras som både begreppsförmågebaserad och procedurförmågebaserad om den till exempel uppfyller ett kriterium vardera för de två olika kategorierna.

Etiska överväganden

Ett etiskt övervägande var att välja tre upplagor av nationella prov som inte står under sekretess. Då studien undersökte vilken typ av förmåga som betonas i de nationella proven hade validiteten stärkts av att använda senare upplagor. Detta då proven kan ändras något över tid och den senaste upplagan kan säga mer om läget idag än vad en upplaga som kom för fem år sedan gör. Att använda de allra senaste upplagorna hade dock betytt att uppgifter som står under sekretess hade röjts, vilket hade varit högst oetiskt. Det var därför aldrig något alternativ. Det hade dessutom varit olagligt vilket hade komplicerat arbetet ytterligare.

Validitet och reliabilitet

Reliabilitet handlar om att säkerställa en studies trovärdighet och replikerbarhet (Bryman, 2018). I en kvalitativ innehållsanalys är det nästan oundvikligt att analysarbetet sker med visst tolkningsutrymme för studiens författare. Att säkerställa reliabilitet och replikerbarhet i en sådan studie är därav en utmaning. För att säkerställa replikerbarhet i denna studie lades mycket fokus på att formulera kriterier inför analysarbetet. För att säkerställa reliabilitet i analysen delades analysarbetet in i två olika steg där stegen utfördes systematiskt var för sig utifrån urvalskriterierna.

Striktare kriterier innebär mindre tolkningsutrymme och därav starkare reliabilitet. Att utforma kriterier var dock komplicerat då ytterligare en faktor behövde beaktas. Om urvalskriterierna hade varit för strikta hade det riskerat att utesluta vissa uppgifter som handlar om bråk och som dessutom testar elevens begreppsförmåga eller procedurförmåga vilket är tätt kopplat till studiens syfte. Därför behövdes ett kriterium som innefattade uppgifter som till exempel ”hur stor är sannolikheten att du får en trea om du kastar en sexsidig tärning en gång?”.

Validitet handlar om att säkerställa att studien mäter det den avser att mäta (Bryman, 2018). En faktor som stärkte både reliabilitet och validitet i studien var studiens teoretiska

ram. Genom att arbeta fram tydliga definitioner av två kategorier blev tolkningsutrymmet i analysarbetet snävt. Analysarbetet präglades av en tydlighet kring vad som skulle identifieras och kategoriseras i proven. Med dessa kategorier är det troligt att resultatet skulle bli detsamma även om en annan person vid ett annat tillfälle upprepar studien, förutsatt att det är samma upplagor av prov som analyseras. Validiteten säkerställdes även i utformandet av studiens forskningsfrågor. Forskningsfråga 1 bidrog till en systematik för att identifiera bråkuppgifter i varje enskilt prov. Forskningsfråga 2 bidrog till att systematiskt identifiera de två kategorier av bråkuppgifter i varje enskilt prov.

Avslutningsvis skall det sägas att kategorisera uppgifterna gick för de mesta relativt smidigt i både steg 1 och 2. Med det sagt var det en del uppgifter som var svår att avgöra vilken kategori de hörde till och en del av kriterierna var öppna för subjektiv tolkning. Detta är något som påverkat studiens reliabilitet. Exempel på uppgifter som var svår att avgöra vilken kategori de hörde till ges i resultatanalysen.

Resultatanalys

I det här avsnittet presenteras studiens resultat. Då studien utgick från två forskningsfrågor är detta avsnitt indelat i två delar där den första delen redogör för resultatet för forskningsfråga 1 medan den andra delen redogör resultatet för forskningsfråga 2. Exempel som kategoriserats som den ena eller andra kategorin kommer att ges i detta avsnitt. Exempelen som ges representerar typiska uppgifter som valts utifrån studiens urvalskriterium. Varje exempel återges i sin helhet som figurer tagna direkt från de nationella proven.

Hur stor del av de nationella proven består av bråkuppgifter?

I denna studie har tre årsupplagor av nationella prov analyserats och varje upplaga består av fyra delprov om man räknar bort delprov A som är det enda delprov som inte har analyserats. Sammanlagt har 188 uppgifter analyserats och kategoriserats utifrån studiens kriterier. Av dessa har 24 kategoriserats som bråkuppgifter. I detta delavsnitt kommer 12 av dessa uppgifter att redogöras för. Redogörelsen sker i huvudsak utifrån studiens kriterier för klassificering av data. Delavsnittet inleds med en sammanfattande tabell av resultatet. Därefter redogörs 12 uppgifter som representerar olika typer av bråkuppgifter och som har klassificerat utifrån olika kriterier.

Tabell 4

Hur stor del av de nationella proven består av bråkuppgifter?

Nationellt prov	<i>Antal uppgifter</i>	<i>Bråkuppgifter</i>	<i>Begreppsförmåga</i>	<i>Procedurförmåga</i>	<i>Andel bråkuppgifter (%)</i>
2013/14	66	8	6	4	Ca 12 %
2014/15	59	8	8	5	Ca 14 %
2015/16	63	8	8	5	Ca 13%

Tabell 4 visar hur stor del av de olika årsupplagorna av nationella prov som består av bråkuppgifter. Noterbart är att samtliga tre upplagor innehåller 8 bråkuppgifter vardera. Totala antalet uppgifter skiljer sig åt mellan de olika upplagorna och därav även andelen (%) bråkuppgifter.

Figur 1

Uppgift 31 A och B från delprov D år 2014/15

31. Maja och Amy har var sin chokladkaka.
 Majas kaka har 20 rutor och Amys kaka har 30 rutor.
 Varje ruta är lika stor och väger lika mycket.



- a) Maja äter $\frac{1}{5}$ av sin chokladkaka och Amy äter $\frac{1}{6}$ av sin. (2/0/0)

Vem har ätit flest rutor?

Visa hur du löser uppgiften.

- b) När Maja ätit upp $\frac{3}{5}$ har hon 32 g kvar av sin chokladkaka. (0/3/0)

Hur mycket vägde hela hennes chokladkaka från början?

Visa hur du löser uppgiften.

En del uppgifter som har analyserats var enkel att klassificera. Figur 1 visar uppgift 31 A och B från delprov D år 2014/15 och de är sådana exempel. Uppgifterna handlar om att räkna ut vem som har ätit flest rutor av sin chokladkaka. Maja hade 20 rutor på sin kaka och åt $\frac{1}{5}$ av

den. Amy hade 30 rutor och åt $\frac{1}{6}$ av den. Det här är ett tydligt exempel på en uppgift där bråk förekommer i beskrivningen av uppgiften och den blev därmed klassificerad som bråkuppgift enligt kriterium 1. Samma sak gäller uppgift 31 B.

Figur 2

Uppgift 15 A och B från delprov B år 2014/15

15. Skriv de tal som saknas i rutorna så att likheterna stämmer.

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{\boxed{}} = 1$ (0/0/1)

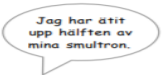



b) $\frac{1}{3} + \frac{\boxed{}}{6} = 1$ (0/0/1)

Figur 2 visar uppgift 15 A och B från delprov B år 2014/15 och de är exempel på uppgifter som var enkla att klassificera som bråkuppgifter. Uppgifterna handlar om att skriva de tal som saknas i bråkuttryck. Båda dessa uppgifter klassificerades som bråkuppgifter.

Figur 3

Uppgift 5 A, B och C från delprov B från 2013/14

5. Titta i rutorna med bilder, tal och pratbubblor. Vilka passar ihop med talen i procentform? Skriv två bokstäver till varje tal.
- a) 25 % _____ (1/0/0)
- b) 20 % _____ (1/0/0)
- c) 60 % _____ (0/1/0)

A	B	C
	$\frac{1}{5}$	0.6
0.25		$\frac{4}{5}$
	$\frac{1}{6}$	

Figur 3 visar uppgift 5 från delprov B från 2013/14. Den är värd att nämna då den överensstämmer med kriterium 2 för att klassificeras som bråkuppgift. I den uppgiften blev eleven tilldelad 25%, 20% och 60% och skulle välja vilka svarsalternativ som stämde överens

med procentsatserna. Bland svarsalternativ förekom både decimaltal och bråk. Bråktalen förekom både som rena bråktal och i form av text och bild. En bild föreställde till exempel fem mynt där ett mynt var guld och de andra var silver. I en ruta var det en pratbubbla där det stod ”jag har ätit upp hälften av mina smultron”. Detta var en uppgift som handlade om mer än bråk men i och med att den handlade om bråk och stämde överens med studiens kriterier för vad som är en bråkuppgift blev den klassificerad som bråkuppgift enligt kriterium 2.

Figur 4

uppgift 23 A och B från delprov D år 2013/14

23. Samira och Kevin hittar en tärning.
Den har sex sidor.

- På en sida av tärningen finns ett spjut.
- På två sidor av tärningen finns en fisk.
- På tre sidor av tärningen finns ett öga.



a) Kevin slår tärningen en gång. (1/0/0)
Hur stor är sannolikheten (chansen) att han får ett spjut?
Skriv bara svar.

b) Samira slår tärningen en gång. (0/2/0)
Hon vill få ett öga eller en fisk.
Hur stor är sannolikheten att hon lyckas?
Visa hur du löser uppgiften.

Figur 4 visar uppgift 23 A och B från delprov D år 2013/14. Uppgiften handlade om tärningskast där frågorna handlade om hur stor är sannolikheten att utfallet blir x. Detta är ett exempel på en uppgift som har klassificerats som bråkuppgift. Dels utifrån det kriterium som handlar om sannolikhet, dels utifrån att tänka i termer av att bråk är det lämpligaste tillvägagångsättet för att lösa uppgiften. När elever räknar sannolikhet med en sexsidig tärning utan miniräknare är det enklare att räkna sjättedelar än procent eller decimaltal. Uppgiften stämde därav överens med kriterium 3.

Figur 5

uppgift 6 A och B från delprov B år 2013/14



- a) Kevins termos väger 480 g. (2/0/0)
 Hur mycket väger 3 likadana termosar tillsammans?
Visa hur du löser uppgiften.

- b) Kevins äpple skärs upp i fyra lika stora bitar. (2/0/0)
 Hur mycket väger varje bit?
Visa hur du löser uppgiften.

Figur 5 visar uppgift 6 A och B från delprov B år 2013/14. Dessa uppgifter är värd att nämna utifrån ett analytiskt perspektiv då de var något mer svårklassificerad än de flesta andra uppgifter. Uppgift 6 A handlar om att räkna ut hur mycket tre termosar väger tillsammans om en termos väger 480 g. Det är en uppgift där det är möjligt för en elev att tänka i termer av bråk där varje termos representerar en tredjedel. Kriteriet ”Uppgiftens kan enklast lösas genom att använda bråk i lösningen av uppgiften” öppnar för tolkning och det här är en uppgift som behövdes tolkas utifrån angivet kriteriet. Författaren till denna studie har gjort tolkningen att det är möjligt att lösa uppgiften genom att tänka i termer av bråk men att det vore enklare att lösa uppgiften genom att endast multiplicera 480 g tre gånger. Uppgiften överensstämmer därmed inte med något kriterium och blev därmed klassificerad som ej bråkuppgift. 6 B handlade om ett äpple som skars i fyra lika stora bitar. Äpplet vägde 196 g och eleven blev instruerad att räkna ut hur mycket varje bit väger. Här behövde eleven begripa att det är en fjärdedel av 196 g som ska räknas ut. Denna uppgift klassificerades därför som en bråkuppgift utifrån Kriterium 4.

Figur 6

uppgift 13 från delprov B år 14/15

13. En koala kan sova 18 timmar på ett dygn.
Hur stor del av ett dygn är det?
Visa hur du löser uppgiften.



(1/1/0)

Figur 6 visar uppgift 13 från delprov B år 14/15 och den handlar om koalans sömn. Informationen eleven ges är att en koala kan sova 18 timmar på ett dygn och frågan som ställs i uppgiften är hur stor del av ett dygn det är. Det här var en uppgift där bråk inte nämndes i uppgiften. Delprovet utförs dock utan miniräknare och att lösa uppgifter med hjälp av bråk ter sig därför lämpligare än någon annan form som till exempel procent. $\frac{18}{24}$ är ett lämpligare svar än 18 dividerat med 24. Bråket $\frac{18}{24}$ kan dessutom förkortas till $\frac{3}{4}$ för att få högre poäng på uppgiften. Även om begreppet andel inte finns med i beskrivningen av uppgiften är det en andel som skall räknas ut och bestämmas. I sådana fall är det typiskt att använda bråk. Uppgiften klassificerades därför som bråkuppgift utifrån kriterium 4.

Då nationella prov testar många områden i matematik är det många uppgifter som inte krävde någon analys för att klassificeras som ej bråkuppgift. Uppgifter som till exempel handlar om att räkna ut omkrets och area eller att räkna antalet timmar och minuter från ett givet klockslag var uppgifter som inte krävde analys.

Vilken typ av förståelse för bråk betonas i de nationella proven?

Denna del av analysen och klassificering gjordes utifrån kategorierna begreppsförmågebaserade uppgifter och procedurförmågebaserade uppgifter. En del uppgifter stämde överens med kriterier för båda kategorierna och blev därav klassificerad som begreppsförmågebaserad och procedurförmågebaserad. I detta delavsnitt ges exempel på uppgifter som har klassificerats och även varför de har klassificerats som en specifik kategori. Det är totalt sex uppgifter som ges som exempel i detta delavsnitt. Uppgifterna som ges som exempel illustrerar typiska uppgifter som klassificerades som det ena eller det andra och även typiska fall där en uppgift klassificerades som både begreppsförmågebaserad och procedurförmågebaserad.

Tabell 5*Vilken typ av förståelse för bråk betonas i de nationella proven?*

Delprov	Antal uppgifter	Bråkuppgifter	Begreppsförmåga	Procedurförmåga
B	79	15	14	5
C	41	2	2	2
D	45	7	6	6
E	23	0	0	0

Tabell 5 visar att delprov B är det delprov med flest bråkuppgifter. Det är även det delprov med flest antal uppgifter totalt. Noterbart är att det är betydligt fler bråkuppgifter som är begreppsförmågebaserad än procedurförmågebaserad i det delprovet. Delprov D är det delprov med näst flest uppgifter. I det delprovet är det lika många uppgifter som klassificerats som procedurförmågebaserad som begreppsförmågebaserad. I det delprovet var det ganska typiskt att en uppgift krävde båda förmågorna för att lösa uppgiften fullt ut. Ett sådant exempel ges i detta delavsnitt som figur 7 men först ges andra exempel på uppgifter som klassificerats utifrån de två olika kategorierna.

Uppgift 5 a, b och c från delprov B från 2013/14 som visas i figur 3 är ett exempel på en uppgift som blev klassificerad som en begreppsförmågebaserad uppgift. I uppgiften skulle eleven para ihop bilder, tal och pratbubblor med 25%, 20% och 60%. Bland bilderna, talen och pratbubblorna fanns bråktal. Den här uppgiften handlade bland annat om att översätta talen i procentform till bråkform, eller bråktalen till procentform beroende på vilken ände den enskilde eleven valde att börja. Uppgiften stämmer därmed överens med ett kriterium för begreppsförmågebaserade uppgifter och klassificerades därefter. För att lösa uppgiften krävs inte någon uträkning och det är därav inte en uppgift som testar elevers procedurförmåga. Uppgiften klassificerades som begreppsförmågebaserad enligt kriterium 1 för begreppsförmågebaserade uppgifter.

Uppgift 31 A och B från delprov D år 2014/15 som visas i figur 1 är uppgifter som testar både begreppsförmåga och procedurförmåga. Uppgift A handlade om att räkna ut om $\frac{1}{5}$ av 20 rutor innebar flest rutor eller om $\frac{1}{6}$ av 30 rutor var flest rutor. Uppgiften kräver förståelse för delar av antal och även förståelse för hur en specifik del av ett specifikt antal kan räknas ut.

Uppgiften handlar även delvis om att omvandla bråktalen till antal rutor vilket överensstämmer med kriterium 1 för begreppsförmågebaserade uppgifter. För att lösa uppgiften krävs även en viss typ av jämförelse av bråktalen och den överensstämmer således även med kriterium 2 för begreppsförmågebaserade uppgiften. En del elever med god begreppsförmåga kan troligtvis lösa uppgiften genom att endast uppskatta antalet rutor för chokladkakorna. Uppgiften går dock att lösa genom att använda något av de fyra räknesätten och den testar därmed även procedurförmåga. Uppgiften testar således både elevens begreppsförmåga och procedurförmåga. Även uppgift B testar både begreppsförmåga och procedurförmåga.

Figur 7

Uppgift 22 i delprov C från 2014/15

22. Stora Barriärrevet är ett stort område i havet där det finns många djur och växter.

Sveriges yta är 447 400 km²
Stora Barriärrevets yta är 344 400 km²

Leo påstår att Stora Barriärrevets yta är ungefär $\frac{3}{4}$ av Sveriges yta. Har Leo rätt?
Motivera ditt svar.



Uppgift 22 i delprov C från 2014/15 som visas i figur 7 är ett exempel på en uppgift som var komplex att analysera. I uppgiften ska eleven avgöra om påståendet att Stora barriärrevet är ungefär $\frac{3}{4}$ av Sveriges yta är sant eller inte. I uppgiftsinformationen står det att Sveriges yta är 447 400 km² och att Stora barriärrevets yta är 344 400 km². Uppgiften testar elevens begreppsförmåga då eleven behöver förstå bråktalens innebörd i det givna sammanhanget. Uppgiften kräver även en viss typ av jämförelse av bråk vilket stämmer överens med kriterium 2 för begreppsförmågebaserade uppgifter. Frågan som ställdes under analysarbetet var huruvida uppgiften även testar procedurförmåga. Det går att argumentera för att uppgiften endast handlar om att uppskatta och det blir i så fall en definitionsfråga huruvida en uppskattning är en typ av uträkning eller inte. Uppskattning är synonymt med begreppet grov beräkning och det kan därför användas som ett argument för att uppgiften testar elevens procedurförmåga. På detta delprov är miniräknare tillåtet och det är därför troligt att en del

elever valde att räkna ut $\frac{1}{4}$ av 447 400 km² för att sedan multiplicera det svaret med 3 och på så sätt få fram det exakta svaret för hur stor yta $\frac{3}{4}$ av 447 400 km² är. Vid en sådan lösning använder eleven sin procedurförmåga. Uppgiftens utformning möjliggjorde därav en lösning där eleven använder sin procedurförmåga och den klassificerades därför även som procedurförmågebaserad.

Diskussion

Det här är studiens avslutande avsnitt. Avsnittet består av en resultatsammanfattning, resultatdiskussion, konsekvenser för lärarprofessionen, metoddiskussion samt fortsatta studier. Avsnittet inleds med en resultatsammanfattning där resultatet har sammanfattats i tabeller.

Resultatsammanfattning

För att sammanfatta resultatet utifrån studiens första forskningsfråga visas först en sammanställande tabell. Därefter visas en sammanställande tabell för att sammanfatta studiens resultat utifrån studiens andra forskningsfråga.

Tabell 4

Hur stor del av de nationella proven består av bråkuppgifter?

Nationellt prov	<i>Antal uppgifter</i>	<i>Bråkuppgifter</i>	<i>Begreppsförmåga</i>	<i>Procedurförmåga</i>	<i>Andel bråkuppgifter (%)</i>
2013/14	66	8	6	4	Ca 12 %
2014/15	59	8	8	5	Ca 14 %
2015/16	63	8	8	5	Ca 13%

I dessa tre upplagor var det totalt 188 uppgifter och av dessa var det 24 uppgifter som klassificerades som bråkuppgifter. Det utgör ca 13 % av provens alla uppgifter. Antal uppgifter varierar mellan de olika årsupplagorna då provet från 2013/14 innehåller 66 uppgifter medan provet från 2014/15 innehåller 59 uppgifter. Något som är noterbart är att de tre upplagorna innehåller lika många bråkuppgifter. Samtliga upplagor innehåller 8

bråkuppgifter vardera men med det sagt är andelen bråkuppgifter ej detsamma då de totala antalet uppgifter varierar.

Tabell 5

Vilken typ av förståelse för bråk betonas i de nationella proven?

Delprov	<i>Antal uppgifter</i>	<i>Bråkuppgifter</i>	<i>Begreppsförmåga</i>	<i>Procedurförmåga</i>
B	79	15	14	5
C	41	2	2	2
D	45	7	6	6
E	23	0	0	0

Utifrån tre årsupplagor av nationella prov som innehöll fyra delprov vardera var det totalt 24 uppgifter som klassificerades som bråkuppgifter. Av dessa 24 bråkuppgifter var det 22 uppgifter som klassificerades som begreppsförmågebaserade uppgifter medan 13 klassificerades som procedurförmågebaserade uppgifter.

Delprov B var det delprov med flest uppgifter och även det delprov med flest bråkuppgifter. Dessa delprov innehåller både rena matematiktal och textuppgifter. I dessa delprov var begreppsförmåga i bråk mer framträdande än procedurförmåga i bråk. Till skillnad från delprov B var procedurförmåga lika framträdande som begreppsförmåga i delprov C och D.

Resultatdiskussion

Syftet med denna studie var att undersöka bråkuppgifters karaktär i de nationella proven i matematik. Inspiration till studien kom utifrån en tidigare vetenskaplig studie där elevers procedurförmåga och begreppsförmåga testades. I en av dessa studier (Braithwaite et al., 2017) separerades procedurförmåga och begreppsförmåga på så sätt att en uppgift endast testade en av dessa förmågor. Slutsatser som drogs i den studien var att elever svarade fel på grund av avsaknad av begreppsförmåga snarare än procedurförmåga. I den studien drogs även slutsatsen att elever tenderar att lära sig procedurer utan anknytning till begreppsförmåga. Det kan till exempel leda till att elever vet hur de ska lösa en specifik uppgift men de förstår inte varför de gör så (Braithwaite et al., 2017).

Av de 24 uppgifter som klassificerades som bråkuppgifter var det 13 uppgifter som testade både begreppsförmåga och procedurförmåga. Det motsvarar ca 54% av bråkuppgifterna. Det finns fördelar med att koppla samman begreppsförmåga och procedurförmåga. Dels för att matematiska symboler upplevs som mer meningsfulla och det gör det även enklare att minnas procedurer (Hiebert & Leferve, 1986). Något som framgick under resultatanalysen var att många uppgifter i de nationella proven testade både elevers begreppsförmåga och procedurförmåga eller åtminstone ger utrymme för eleven att använda någon av dessa förmågor när elever löser uppgifterna. Det skall sägas att samtliga uppgifter som klassificerades som bråkuppgifter uppfyllde därefter minst ett av kriterierna för att bli klassificerad som begreppsförmågebaserad eller procedurförmågebaserad. Det går inte att dra någon slutsats men det kan i alla fall ses som en indikation på att det finns en tanke att förmågorna till stor del skall kopplas samman i de nationella provens bråkuppgifter. Det mest anmärkningsvärda är dock att av de 24 uppgifter som klassificerades som bråkuppgifter var det 22 uppgifter som testade elevers begreppsförmåga. Det motsvarar ca 92% av bråkuppgifterna. 13 av 24 bråkuppgifter testade elevers procedurförmåga vilket motsvarar ca 54% av bråkuppgifterna. Begreppsförmåga dominerar bråkuppgifterna i de nationella proven. Det finns uppgifter som endast testar elevers procedurförmåga men de är i sammanhanget relativt få. I stället verkar det som att de bråkuppgifter som testar procedurförmåga i de flesta fall även testar begreppsförmåga. Begreppsförmågan är separerad från procedurförmågan i flera fall medan procedurförmågan oftast är kopplad till begreppsförmåga. Detta är intressant då Braithwaite et al. (2017) menar att en stor källa till elevers svårigheter med bråk är att elever lär sig procedurer utan anknytning till begreppsförmåga. Bråkuppgifterna i de nationella proven verkar dock, till relativt stor del kräva begreppsförmåga för att testa procedurförmåga då få uppgifter endast testar procedurförmåga. Uppgift 13 från delprov B år 2014/15 (figur 6) som handlade om koalans sömn är ett exempel på en uppgift där begreppsförmågan testas i första hand. Om koalans sömn är 18 timmar på ett dygn behöver eleven förstå att 18 timmar av ett dygn kan uttryckas som $\frac{18}{24}$. Detta steg testar endast begreppsförmågan. Eleven kan sedan få en till poäng på uppgiften om bråket förkortas till $\frac{3}{4}$. Bråkuppgifternas karaktär i proven var till stor del så att begreppsförmåga behövdes i ett första steg för att sedan testa procedurförmåga.

En faktor som gör bråk komplicerat är att det finns vanliga missuppfattningar kring bråk. En del av dem kan även vara svåra att upptäcka (Clarke & Roche, 2009). Utifrån den aspekten är de nationella proven relativt bra. Variationen av bråkuppgifter är god nog för att

missuppfattningar skall synliggöras. Uppgift 12 b från delprov B år 2013/14 handlar om att ange det största bråket $\frac{3}{7}$ och $\frac{5}{9}$. Eleven skall även motivera sitt svar i en textruta. I en sådan uppgift kan den vanliga missuppfattningen att desto högre siffror i täljare och nämnare, desto större är bråket synliggöras (Alkhateeb, 2019; Loc, et al., 2017; Aliustaoglu et al., 2018). Det går att bära på missuppfattningen och samtidigt ange det korrekta svaret men i och med att svaret skall motiveras är det möjligt att se om elevens resonemang bygger på en missuppfattning eller ett matematiskt korrekt resonemang för att förstå bråk. Uppgiften är även väl utformad för att upptäcka den vanliga missuppfattningen att desto mindre skillnad det är mellan bråket täljare och nämnare, desto mindre är bråket (Mohyuddin & Khalil, 2016). Med den missuppfattningen skulle dessa två bråk ses som lika stora.

I studiens litteraturgenomgång redovisades tabeller som visade elevers resultat. Huruvida resultaten såg bra ut från de tre upplagorna av nationella prov är upp till betraktaren att avgöra. Resultaten i sig, säger dock inget om hur det gick för elever på de bråkuppgifter som har analyserats i denna studie. Utan tillgång till elevers resultat på specifika uppgifter går det inte att uttala sig om elevers förståelse för bråk utifrån de analyser som gjorts i denna studie. Det går varken stärka eller argumentera emot tesen att svenska elevers bråkkunskaper är bristfälliga som Kilborn (2014) menade utifrån PISA och TIMMS.

Konsekvenser för lärarprofessionen

En slutsats som kan dras utifrån studien är att de nationella proven fokuserar mer på begreppsförmåga än procedurförmåga. Det betyder att även undervisningen behöver fokusera mer på begreppsförmåga än procedurförmåga för att eleverna skall lyckas bra på de nationella proven. Med tanke på att lärare anser att de nationella proven konkretiserar kunskapskraven och vad undervisning bör syfta mot på ett bra sätt (Skolverket, 2015), bör undervisning i bråk fokusera främst på att utveckla elevers begreppsförmåga.

Studiens resultat bidrar även med något som liknar en överblick hur bråkuppgifter i de nationella proven ser ut. Det är i alla fall något som den enskilda läraren har möjlighet att reflektera kring. Detta i kombination med den tidigare forskning som vidrörts under studiens gång. Det är till exempel möjligt som enskild lärare att reflektera och bilda sig en egen uppfattning huruvida begreppsförmåga och procedurförmåga bör integreras med varandra och hur det i så fall bör undervisas.

Metoddiskussion

Kvalitativ innehållsanalys var ett rimligt val av metod sett till studiens syfte. Studiens huvudsakliga syfte var att undersöka vilken förmåga som betonas i de nationella provens bråkuppgifter. Det var därför ett avvägd val att välja en metod som möjliggjorde att alla uppgifter i proven klassificerades i enighet med uppsatta kriterier. Genom detta metodval framkom det vilka uppgifter som var begreppsförmågebaserade och procedurförmågebaserade vilket var det som studien var ämnad att undersöka.

Även om metodvalet var rimligt fanns det tveksamheter som bör diskuteras i förhållande till studiens genomförande. Analysen gjordes i två delar där båda delarna gjordes utifrån uppsatta kriterier. Dilemma förekom i båda delarna då kriterierna behövde vara tydliga men samtidigt inte alltför snäva och riskera att utesluta uppgifter.

För att identifiera och klassificera bråkuppgifter i det första steget krävdes tydliga kriterier för att identifiera uppgifter som handlade om bråk. De två första kriterierna var att en uppgift var en bråkuppgift om bråk antingen förekom i uppgiftsbeskrivningen eller om bråk förekom som svarsalternativ. Om dessa kriterier hade varit de enda hade det varit enkelt att identifiera bråkuppgifter och studiens reliabilitet hade varit hög. Det hade dock inneburit att långt färre uppgifter hade klassificerats som bråkuppgifter och underlaget för en analys hade blivit alltför tunt. Därför behövdes fler kriterier för att inkludera fler uppgifter. Dessa ytterligare kriterier var därav nödvändiga men kom till på bekostnad av lite reliabilitet. Uppgift 23 från delprov D år 2013/14 hade till exempel inte kategoriserats som bråkuppgift om det inte vore för kriteriet som handlade om sannolikhet. Den uppgiften handlade om tärningskast. Uppgift 29 från samma delprov hade eventuellt inte klassificerats som bråkuppgift om det inte vore för kriteriet ”Uppgiften kan enklast lösas genom att använda bråk”. Den uppgiften handlade om djur på en bondgård där var fjärde djur var gris, ett av åtta var får, hälften var höns och resten av djuren var kor.

Det finns även en del att belysa angående kriterierna för begrepps- respektive procedurförmåga. I studien användes tre kriterier för att identifiera begreppsförmågebaserade uppgifter. Det användes endast ett kriterium för att identifiera procedurförmågebaserade uppgifter. Det är anmärkningsvärt att det användes tre möjliga kriterier för den ena kategorin och endast ett möjligt kriterium för den andra kategorin. Det kan vara något som påverkade resultatet och det kan vara något som bidrog till att många fler begreppsförmågebaserade uppgifter identifierades än procedurförmågebaserade uppgifter. Det kan vid en första anblick

ses som en svaghet i studien. Faktum är dock att utifrån den tidigare forskning och de referenser som denna studie lutar sig mot är begreppsförmåga mer omfattande än vad procedurförmåga är. Det finns fler aspekter som vidrör begreppsförmåga än procedurförmåga och det var därför inte orimligt att ha fler kriterier för begreppsförmågebaserade uppgifter. Procedurförmåga är enklare att urskilja och det är därför sannolikt att fler kriterier inte hade tillfört något.

Avslutningsvis bör det påpekas att begreppsförmåga och procedurförmåga är som tidigare nämnt komplicerat att särskilja ibland. När urvalskriterierna till de olika förmågorna formulerades var det utifrån den tidigare forskning och de tidigare studier som vidrörts i denna studie. Med det sagt går det till exempel att argumentera för att det första kriteriet för begreppsförmågebaserade uppgifter är ett kriterium som även innefattar procedurförmåga. Att till exempel omvandla procent till bråktal kan ses som en procedur men i denna studie ansågs det snarare som att förstå bråk utifrån ett sammanhang, alltså begreppsförmåga. Det är fullt möjligt att en annan författare som gör en liknande studie anser att det är båda förmågorna. Detta är något som påverkar denna studies validitet negativt.

Fortsatta studier

Denna studie resulterade i något som liknar en översikt över bråkuppgifters karaktär i svenska nationella prov. Det vore intressant att använda denna studie och översikt för att jämföra bråkuppgifters karaktär i de svenska nationella proven med bråkuppgifters karaktär i något annat mätinstrument som till exempel TIMMS eller PISA. Detta vore intressant med tanke på att de internationella undersökningarna TIMMS (1995, 2003, 2007) och PISA (2000, 2003, 2006, 2009) har visat att svenska elevers kunskaper i bråk ser ut att vara mindre bra (Kilborn, 2014). Om det är så att karaktären på uppgifter ser olika ut kan det eventuellt förklara en liten del varför svenska elever ser ut att ha bristfälliga kunskaper i bråk. Om uppgifters karaktär är relativt lika stärker det eventuellt tesen att svenska elevers bråkkunskaper är mindre bra.

Ett annat alternativ till fortsatta studier är att på ett liknande sätt som Braithwaite et al. (2017) separera begreppsförmåga och procedurförmåga vid bråkuppgifter för att testa svenska elevers förmågor när förmågorna är isolerade från varandra.

Referenser

- Aliustaoglu, F., Tuna, A., & Biber, A. Ç. (2018). Misconceptions of Sixth Grade Secondary School Students on Fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10(5), 591 – 599. Doi: 10.26822/iejee.2018541308
- Alkhateeb, M. A. (2019). Common Errors in Fractions and the Thinking Strategies That Accompany Them. *International Journal of Instruction*, 12(2), 399 – 416. Doi: 1029333/iji.2019.12226a
- Braithwaite, D. W., Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Do Children Understand Fraction Addition? *Developmental Science*, 21(4). Doi: 10.1111/desc.12601
- Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (Upplaga 3). Stockholm: Liber.
- Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Student's Fraction Comparison Strategies as a Window into Robust Understanding and Possible Pointers for Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 127 – 138. Doi: 10.1007/s10649-009-9198-9
- Eriksson Barajas, K. Forsberg, C. Wengström Y. (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap: vägledning vid examensarbeten och vetenskapliga artiklar*. (1. Utg.) Stockholm: Natur & Kultur.
- Fejes, A. & Thornberg, R. (red.) (2015). *Handbok i kvalitativ analys*. (2. Utök. Uppl.) Stockholm: Liber.
- Hallet, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102, 395–406.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis (s. 1 – 27). Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Hägglom, L. (2013). *Med matematiska förmågor som kompass*. (1. Uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- James, G. & James, R.C. (red.) (1992). *Mathematics dictionary*. (5. Ed.) New York: Chapman & Hall.
- Kilborn, W. (2014). *Om tal i bråk och decimalform – en röd tråd*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.

- Kiselman, C. O. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. (1. Uppl.) Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*, 629 – 667.
- Loc, N. P., Tong, D. H., & Chau, P. T. (2017). Identifying the Concept "Fraction" of Primary School Students: The Investigation in Vietnam. *Educational Research and Reviews*, 12(8), 531 – 539. Doi: 10.5897/ERR2017.3220
- Lundahl, C. (2014). *Bedömning för lärande*. (2., [oförändr.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använd tal: en handbok*. (1. Uppl.) Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning (NCM), Göteborgs universitet.
- Mohyuddin, R. G., & Khalil, U. (2016). Misconceptions of Students in Learning Mathematics at Primary Level. *Bulletin of Education and Research*, 38(1), 133 – 162. Inget doi.
- National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: Final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.
- Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The New Frontier for Theories of Numerical Development. *Grantee Submission*, 17(1), 13 – 19.
- Skolverket (2015): De nationella proven och deras effekter i årskurs 6 och 9 – en intervjustudie med elever, lärare och skolledare.
- Tunc-Pekkan, Z. (2015). An Analysis of Elementary School Children's Fractional Knowledge Depicted with Circle, Rectangle, and Number Line Representations. *Educational Studies in Mathematics* 89, 419–441 (2015). Doi: 10.1007/s10649-015-9606-2