ÖREBRO
UNIVERSITET
Institutionen för naturvetenskap och teknik

Γ-funktionen

En kort introduktion

Rickard Edman och Markus Östberg

Örebro universitet
Institutionen för naturvetenskap och teknik
Matematik C, 76 – 90 högskolepoäng

Γ-funktionen
En kort introduktion

Rickard Edman och Markus Östberg

Hösten 2011

Handledare: Marcus Sundhäll
Examinator: Niklas Erikssen

Självständigt arbete, 15 hp
Matematik, C–nivå, 76 – 90 hp

Sammanfattning

Inom matematiken använder man sig ibland av fakulteter som är en funktion över naturliga talen som kan definieras rekursivt enligt

$$n! = \begin{cases} n(n-1)! & \text{om } n > 0, \\ 1 & \text{om } n = 0. \end{cases}$$

Vad händer då om man tar fakulteten av ett rationellt tal, exempelvis $\frac{1}{2}$? Γ-funktionen (Γ är den grekiska versalen gamma som vi använder genomgående i denna uppsats) ger oss möjligheten att beräkna fakulteter av inte bara reella tal utan även komplexa tal. I denna uppsats vill vi belysa några intressanta egenskaper av Γ-funktionen och var den kan tänkas dyka upp. Trots att den studeras inom spridda grenar av matematiken som kombinatorik och algebra har vi dock i denna uppsats valt en analytisk framställning och begränsat oss till de reella talen.

I första kapitlet visar vi trevliga egenskaper som kontinuitet och en entydighetssats som går under namnet Bohr-Mollerups sats. I andra kapitlet behandlar vi kvoter av Γ-funktionen och ser på hur dessa beter sig asymptotiskt, alltså för väldigt stora argument. I sista kapitlet ser vi hur Γ-funktionen används till att beräkna volymer och areor för klot i rummet $\mathbf{R}^n$ vilket leder oss till intressanta filosofiska frågeställningar som vad ytor i högre dimensioner innebär.

Läsaren förväntas ha kunskaper inom en- och flervariabelanalys samt läst en kurs i analysens grunder, men framställningen är även på den nivå att matematikintresserade studenter ska få en grundlig inblick i hur Γ-funktionen generaliserar $n!$ och var den kan dyka upp på för andra ställen inom analysen t.ex i beräknandet av volymintegraler.

Avslutningsvis vill vi tacka vår handledare Marcus Sundhäll som varit ett stort stöd åt oss i arbetet av denna uppsats.

Markus Östberg och Rickard Edman

Innehåll

1 Några viktiga egenskaper hos Γ-funktionen **4**

1.1 Väldefinierad och kontinuerlig 4

1.2 Hölders olikhet 6

1.3 Bohr-Mollerups sats 11

1.4 Betafunktionen 14

2 Asymptotiskt beteende av Γ-funktionen **19**

2.1 Stirlings formel 19

2.2 Pochhammersymbolen 24

3 Area och volym i n dimensioner **26**

3.1 Polära koordinater 26

3.1.1 Exempel 27

3.2 Volym och ytarea av n-dimensionella klot 29

3.3 Volym och ytarea för några n 30

3.4 Filosofisk utläggning 30

Historik

Γ-funktionen formulerades för första gången på 1720-talet av schweiziska matematikern Leonhard Euler (1707–1783) i korrespondens med Christian Goldbach (1690–1764). Problemet var att att finna en simpel formel till $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ som gäller för andra tal än heltal. Om vi byter ut multiplikationstecknet mot addition får vi istället den aritmetiska summan $1+2+3+\ldots+n$ med den välkända formeln $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$. Detta möjliggör insättning av alla sorters tal, t.ex ger $S_{\frac{1}{2}}$ värdet $\frac{3}{8}$, även om det inte är särskilt meningsfullt att addera en halv term. En formel av denna enklare sort för $n!$ finns inte utan att ta hjälp av analytiska metoder. Detta ledde Euler till att studera oändliga processer och lyckades 1729, i sin korrespondens med Christian Goldbach, formulera den oändliga produkten

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots = n!.$$

Om vi bortser från intressanta aspekter som konvergens så ser vi att vänsterledet gäller för alla sorters tal förutom negativa heltal, eftersom det leder till noll i nämnaren för någon av faktorerna.

Året efter formulerade Euler det som idag kallas Eulers andra integral:

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n \, dx \tag{1}$$

Adrien Marie Legendre (1752-1833) skrev senare om (1) till det vi idag känner igen som Γ-funktionen:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

där

$$\Gamma(n+1) = n!$$

för naturliga tal n.

Kapitel 1

Några viktiga egenskaper hos Γ-funktionen

I detta kapitel kommer vi att gå in på trevliga egenskaper som kontinuitet och konvexitet. Avslutningsvis visar vi entydighetssatsen för Γ-funktionen som kallas Bohr-Mollerups sats. Vi kommer att börja med att visa att Γ-funktionen är väldefinierad och kontinuerlig för alla positiva x, i detta kapitels första avsnitt.

1.1 Väldefinierad och kontinuerlig

Vi kommer nu att visa att Γ-funktionen är väldefinierad och kontinuerlig för alla positiva x.

Lemma 1.1.1. *För varje $x > 0$ gäller det att $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ är konvergent.*

Bevis. Vi behöver försäkra oss om att $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ är konvergent för alla x i definitionsmängden. Om vi betraktar intervallet $x \in [1, \infty[$ ser vi att integralen är generaliserad i ∞. För stora t är $0 \le t^{x-1}e^{-t} \le e^{-\frac{t}{2}}$ och eftersom $\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\,dt$ är konvergent får vi att $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ är konvergent (se [5] s. 316). Om vi betraktar intervallet $x \in (0, 1)$ så är integralen generaliserad i båda ändpunkterna. För att undersöka konvergens delar vi integralen i två delar:

$$\Gamma_1 = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \text{och} \quad \Gamma_2 = \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

För $t > 0$ har vi att

$$0 \le t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1} \quad \text{och} \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 t^{x-1}\,dt$$

existerar, alltså är Γ_1 är konvergent. Om vi som tidigare väljer tillräckligt stora t har vi att

$$0 \le t^{x-1}e^{-t} \le e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{och} \quad \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_1^\varepsilon e^{-\frac{t}{2}}\,dt$$

existerar, så följer det att även Γ_2 är konvergent. $\square$

Enligt lemma 1.1.1 kan vi nu definera Γ-funktionen.

Definition 1.1.1. Vi definierar

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

för $x > 0$.

Lemma 1.1.2. *$\Gamma(x)$ är kontinuerlig på intervallet* $(0, \infty)$

Bevis. Sätt $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ där $(x,t) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$. Låt x_1 och x_2 vara fixa och välj sedan R_1 och R_2 så att

$$f(x_1, t) < e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{om} \quad t > R_1$$

och

$$f(x_2, t) < e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{om} \quad t > R_2.$$

Sätt $R' = \max(R_1, R_2)$ som är det största av talen R_1 och R_2. Givet $\varepsilon > 0$ så kan vi välja ett R'' sådant att

$$\int_{R''}^\infty e^{-\frac{t}{2}}\, dt = \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_{R''}^\infty = 2e^{-\frac{R''}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Väljer vi nu $R = \max(R', R'')$ och noterar att $f(x,t)$ är likformigt kontinuerlig på den kompakta rektangeln $[x_1, x_2] \times [0, R]$ så finns det ett $\delta(\varepsilon)$ så att

$$|f(x_1,t) - f(x_2,t)| = \left|t^{x_1-1} - t^{x_2-1}\right| e^{-t} < \frac{\varepsilon}{3R+1}$$

om $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$. Då får vi

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^\infty f(x_1,t)\, dt - \int_0^\infty f(x_2,t)\, dt \right| \\
= & \left| \int_0^R \left(t^{x_1-1} - t^{x_2-1}\right) e^{-t}\, dt + \int_R^\infty t^{x_1-1}e^{-t}\, dt - \int_R^\infty t^{x_2-1}e^{-t}\, dt \right| \\
\le & \left| \int_0^R \left(t^{x_1-1} - t^{x_2-1}\right) e^{-t}\, dt \right| + \left| \int_R^\infty t^{x_1-1}e^{-t}\, dt \right| + \left| \int_R^\infty t^{x_2-1}e^{-t}\, dt \right| \\
\le & \int_0^R \left|t^{x_1-1} - t^{x_2-1}\right| e^{-t}\, dt + \int_R^\infty e^{-t/2}\, dt + \int_R^\infty e^{-t/2}\, dt \\
\le & \frac{\varepsilon}{3R+1} \cdot R + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \ < \ \varepsilon,
\end{aligned}$$

där vi använt triangelolikheten för integraler (se [7], s. 129, sats 6.13) och beviset är klart. $\square$

1.2 Hölders olikhet

Vidare kommer vi att gå igenom några fler av de egenskaper som karaktäriserar Γ-funktionen. För att bevisa dessa egenskaper behöver vi dock en annan väl omtalad sats, nämligen *Hölders olikhet*, som ni kan se nedan.

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g(t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}.$$

För att bevisa denna sats behöver vi först några definitioner och lemman till vår hjälp. Följande definition går att finna i [5], s. 253.

Definition 1.2.1. En funktion f på (a, b) kallas *strängt konvex* om det för alla par av punkter $x_1 \neq x_2 \in D_f$ och varje θ sådan att $0 < \theta < 1$ gäller att

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) < \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2).$$

Om man tillåter likhet kallar man f för en *konvex* funktion.

Konvexa funktioner har egenskapen att givet två punkter P_1, P_2 på funktionskurvan så ligger samtliga punkter mellan P_1, P_2 under den räta linje som sammanbinder punkterna P_1, P_2, vilket illustreras av följande lemma.

Lemma 1.2.1. *Låt I vara ett intervall där x_1, x_2, $x_3 \in I$ och $x_1 < x_2 < x_3$. Då gäller att f är strängt konvex om och endast om*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

Observera att olikheten även gäller då f är konvex, men att vi då tillåter likhet.

Bevis. $\Longrightarrow$: Då f är strängt konvex gäller att

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_3) < \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_3) \tag{1.1}$$

Vi väljer $\theta = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$ och av detta följer att $1 - \theta = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Eftersom punkten x_2 ligger strikt mellan x_1 och x_3, samt att vi väljer $\theta = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$ kan vi skriva x_2 som $x_2 = \theta x_1 + (1-\theta)x_3$, där $\theta = 1$ ger x_1 och $\theta = 0$ ger x_3. Vi sätter in i (1.1) och får

$$\begin{aligned}
f(\theta x_1 + (1-\theta)x_3) &< \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_3) \\
f(x_2) &< \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) f(x_1) \\
f(x_2) - f(x_1) &< \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_1) \\
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &< \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$: Vi antar nu att vi har

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

och vill visa att f är strängt konvex. Eftersom punkten x_2 strikt ligger mellan x_1 och x_3 kan vi skriva den som $x_2 = \theta x_1 + (1-\theta)x_3$ och från detta erhålla $\theta = \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}$, samt $1-\theta = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}$. Sedan återstår endast att göra de uträkningar som gjordes tidigare, men nu åt motsatt håll, vilket lämnas åt läsaren. $\square$

Lemma 1.2.2. *Om $f(x)$ är deriverbar för alla x på (a,b) och $f'(x) > 0$ på hela intervallet så är $f(x)$ strängt växande på (a,b).*

Bevis. Låt x vara en punkt strikt mellan x_1, x_2 sådant att $a < x_1 < x < x_2 < b$. Enligt medelvärdessatsen har vi att $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x)$ där höderledet är positivt. Alltså är $f(x_2) - f(x_1) > 0$ om $x_2 - x_1 > 0$ vilket är definitionen av en strängt växande funktion. $\square$

Följande sats går att finna i [5] (se sats 5 s. 253), men för läsarens skull presenterar vi ett likartat bevis där vi förenklat och fyllt i vissa steg.

Sats 1.2.1. *En deriverbar funktion f är strängt konvex om och endast om dess derivata f' är strängt växande*

Bevis. $\Longrightarrow$: Antag att f är strängt konvex. Vi vill visa att f' är strängt växande. Låt x_1, x_2 vara två punkter i vårt definitionsintervall sådana att $x_1 < x_2$. Eftersom f är strängt konvex gäller det enligt lemma (1.2.1) att

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1}, \quad \text{då } x_1 < x < y < x_2. \tag{1.2}$$

Vi ser att funktionen

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

är strängt växande. Om vi sätter in $y = x_2$ i 1.2 och låter x gå mot x_1^+ får vi att

$$g'(x_1) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Analogt visar man att

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < g'(x_2).$$

Av detta följer att $g'(x_1) < g'(x_2)$, alltså att g' är strängt växande.
$\Longleftarrow$: Vi antar nu att f' är strängt växande och vill visa att

$$\begin{aligned} &f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) < \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) \\ &0 < \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) - f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2), \end{aligned} \tag{1.3}$$

där $0 < \theta < 1$. Antag att $x_1 < x_2$ och sätt $\xi = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$. Med hjälp av medelvärdessatsen vill vi visa att högerledet i (1.3) är positivt. Vi har

$$\begin{aligned}
& \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) - f(\theta x_1 + (1-\theta x_2)) \\
= \; & \theta(f(x_1) - f(\xi)) + (1-\theta)(f(x_2) - f(\xi)) \\
= \; & \theta(x_1 - \xi)f'(\xi_1) + (1-\theta)(x_2 - \xi)f'(\xi_2) \\
= \; & \theta\Big(x_1 - \big[\theta x_1 + (1-\theta)x_2\big]\Big)f'(\xi_1) + (1-\theta)\Big(x_2 - \big[\theta x_1 + (1-\theta)x_2\big]\Big)f'(\xi_2) \\
= \; & \theta(1-\theta)(x_2 - x_1)(f'(\xi_2) - f'(\xi_1)),
\end{aligned}$$

där $x_1 < \xi_1 < \xi < \xi_2 < x_2$. Eftersom f' är strängt växande och $\xi_1 < \xi_2$ så är

$$f'(\xi_2) - f'(\xi_1) > 0 \quad \text{och} \quad \theta(1-\theta)(x_2 - x_1) > 0$$

vilket medför att

$$0 < \theta(1-\theta)(x_2 - x_1)(f'(\xi_2) - f'(\xi_1)),$$

och beviset är klart. □

Korollarium 1.2.1. *Antag att $f(x)$ har en kontinuerlig andraderivata på ett intervall $x \in (a,b)$. Då gäller det att $f(x)$ är strängt konvex på (a,b) om och endast om $f''(x) > 0$ för alla $x \in (a,b)$.*

Bevis. Antag att $f''(x) > 0$. Eftersom $f''(x) = (f(x)')' > 0$ så gäller det enligt lemma 1.2.2 att $f'(x)$ är strängt växande på (a,b) vilket enligt sats 1.2.1 är ekvivalent med att $f(x)$ är strängt konvex. □

Lemma 1.2.3. *Låt p och q vara positiva tal som uppfyller*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Om $u \geq 0$ och $v \geq 0$ så gäller att

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

med likhet då $u^p = v^q$.

Bevis. Vi kan skriva om vänsterledet och få

$$\begin{aligned}
uv &= e^{\ln uv} \\
&= e^{\ln u + \ln v} \\
&= e^{\frac{1}{p}\ln u^p + \frac{1}{q}\ln v^q}.
\end{aligned}$$

Eftersom $\left(e^t\right)'' > 0$ för alla t så är enligt korollarium 1.2.1 e^t konvex. Då är enligt definitionen av konvexitet

$$e^{\theta x + (1-\theta)y} \leq \theta e^x + (1-\theta)e^y.$$

Sätt $p = \frac{1}{\theta}$ och notera att $1 - \theta = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, vi erhåller då

$$e^{\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y} \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y. \tag{1.4}$$

Med $x = \ln u^p$, $y = \ln v^q$ blir (1.4)

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{p}\ln u^p + \frac{1}{q}\ln v^q} &= uv \\ &\leq \frac{1}{p}e^{\ln u^p} + \frac{1}{q}e^{lnv^q} \\ &= \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}. \end{aligned}$$

För likhet antar vi att $u^p = v^q$. Vi har

$$\begin{aligned} uv &= u(v^q)^{\frac{1}{q}} = u(u^p)^{\frac{1}{q}} = u^{1+\frac{p}{q}} \\ &= u^{p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} = u^p \\ &= \frac{u^p}{p} + \frac{u^p}{q} = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.2.4. *Låt f, g vara kontinuerliga, $f \geq 0$, $g \geq 0$ och*

$$\int_a^b f^p \, dx = 1 = \int_a^b g^q \, dx, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p\,, q > 0,$$

där vi tillåter $a = -\infty$ och $b = +\infty$. Då gäller

$$\int_a^b fg \, dx \leq 1$$

Bevis. Eftersom f, g är positiva och kontinuerliga funktioner gäller att även fg är positiv och kontinuerlig på samma intervall. Av lemma 1.2.3 får vi då att

$$f(x)g(x) \leq \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}, \quad a \leq x \leq b$$

Vi får att

$$\int_a^b fg \, dx \leq \frac{1}{p}\int_a^b f^p \, dx + \frac{1}{q}\int_a^b g^q \, dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Lemma 1.2.5. *Låt $f(x) \geq 0$, $f(x)$ kontinuerlig på (a, b). Då gäller det att*

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0, \quad \text{då } a < x < b.$$

Bevis. antag att $f(x_0) > 0$ för något $x_0 \in (a, b)$. Eftersom f är kontinuerlig på hela (a, b) kan vi välja ett δ så att $f(x) > 0$ på intervallet $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Om vi använder uppskattningar för integraler (se [5], s.302) får vi att

$$f(x) > 0 \quad \text{på} \quad [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Longrightarrow \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx > 0,$$

och eftersom x_0 var godtyckligt valt så är vi klara. □

Nu har vi alla verktyg till att formulera *Hölders olikhet.*

Sats 1.2.2 (**Hölders olikhet**). *Låt p och q vara positiva reella tal sådana att $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Om f, g är kontinuerliga, reella funktioner så gäller att*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leq \left[\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{1.5}$$

där vi tillåter $a = -\infty$ och $b = +\infty$.

Bevis. Låt f och g vara kontinuerliga. Enligt triangelolikheten för integraler (se till exempel sats 6, s. 304, [5]) får vi

$$\left|\int_a^b fg\,dx\right| \leq \int_a^b |f||g|\,dx.$$

Vi definierar

$$A = \left[\int_a^b |f|^p\;dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

och

$$B = \left[\int_a^b |g|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}},$$

där vi antar att A och B är positiva. Då har vi

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(|f| \cdot A^{-1}\right)^p\;dx &= A^{-p}\int_a^b |f|^p\,dx \\ &= A^{-p}A^p \\ &= 1\end{aligned}$$

samt

$$\int_a^b \left(|g| \cdot B^{-1}\right)^q\;dx = 1$$

Enligt lemma 1.2.4 gäller

$$\int_a^b \left(|f|A^{-1} \cdot |g|B^{-1}\right)dx \leq 1,$$

så att
$$\int_a^b |f||g|\,dx \le A\cdot B = \left[\int_a^b |f|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}}$$
Vid fallet $A = 0$ eller $B = 0$ vet vi från lemma 1.2.5 att $f = 0$ då $A = 0$, samt $g = 0$ då $B = 0$, vilket ger oss att olikheten i (1.5) uppfylls. $\square$

1.3 Bohr-Mollerups sats

I detta avsnitt visar vi entydighet för Γ-funktionen i en sats som går under namnet Bohr-Mollerups sats. Först visar vi en existenssats som visar att det finns en funktion, Γ-funktionen, som uppfyller tre villkor.

Sats 1.3.1. *För alla x som Γ är definierad på gäller*

(a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(b) $\Gamma(n+1) = n!$ *för* $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

(c) $\log\Gamma$ *är konvex.*

Bevis. a) Genom en partialintegration får vi
$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt\\ &= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt\\ &= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

b) Om vi sätter $x = n$ i (a) så följer det genom induktion att $\Gamma(n+1) = n!$.
c) Vill visa att
$$\log\Gamma\left(\theta x + (1-\theta)y\right) \le \theta\log\Gamma(x) + (1-\theta)\log\Gamma(y).$$

Om vi gör samma variabelsubstitution som i lemma 1.2.3 får vi att ovanstående kan skrivas om till
$$\log\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \le \frac{1}{p}\log\Gamma(x) + \frac{1}{q}\log\Gamma(y)$$

där
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Om vi dessutom skriver $t = \frac{t}{p} + \frac{t}{q}$ får vi

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{p}\right) &= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}\, dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} e^{-(\frac{t}{p}+\frac{t}{q})}\, dt \\
&= \int_0^\infty \underbrace{t^{\frac{x}{p}-\frac{1}{p}} e^{-\frac{t}{p}}}_{f} \cdot \underbrace{t^{\frac{y}{q}-\frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{q}}}_{g}\, dt \\
&= \int_0^\infty fg\, dt \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left[\int_0^\infty |f|^p\ dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty |g|^q\ dt\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Logaritmerar vi bägge led får vi

$$\begin{aligned}
\log\Gamma\Big(\frac{x}{p} + \frac{y}{p}\Big) &\leq \frac{1}{p}\log\int_0^\infty |f|^p\ dt + \frac{1}{q}\log\int_0^\infty |g|^q\ dt \\
&= \frac{1}{p}\log\int_0^\infty \left|t^{x-1}e^{-t}\right|\ dt + \frac{1}{q}\log\int_0^\infty \left|t^{y-1}e^{-t}\right|\ dt \\
&= \frac{1}{p}\log\Gamma(x) + \frac{1}{q}\log\Gamma(y)
\end{aligned}$$

och beviset är klart. □

Bohr-Mollerups sats, efter danska matematikerna Harald Bohr och Johannes Mollerup, säger att Γ-funktionen är entydigt bestämt av dessa tre egenskaper. Den formuleras i [7] och vi kommer nu att göra en liknande formulering.

Sats 1.3.2. *Om f är en positiv funktion på $(0, \infty)$ sådant att*

(a) $f(x+1) = xf(x)$

(b) $f(1) = 1$

(c) $\log f$ *är konvex*

då är $f(x) = \Gamma(x)$.

Beviset är snarlikt som det i [7] men vi väljer att komplettera det i vissa avseenden så att det blir mer fullständigt.

Bevis. Vi vet att det redan finns en funktion som uppfyller $(a), (b)$, och (c), nämligen Γ. Det räcker att visa att $f(x)$ är entydigt bestämt av $(a), (b)$, och (c) för alla $x > 0$. På grund av egenskaperna i (a) räcker det att visa för $x \in (0, 1]$. Sätt

$$\varphi(x) = \log f(x).$$

Då är

$$\varphi(x+1) = \log\left(f(x+1)\right) = \log\left(xf(x)\right) = \log\, x + \varphi(x) \qquad 0 < x < \infty,$$

Vi vet att $\varphi(1) = 0$ och $\varphi(x)$ konvex. Antag att n är ett positivt heltal. Då är

$$\begin{aligned}
\varphi(n+1) &= \log\left(nf(n)\right) \\
&= \log\left(n(n-1)f(n-1)\right) \\
&= \log\left(n(n-1)\cdots f(n-(n-1))\right) \\
&= \log\left(n(n-1)\cdots f(1)\right) \\
&= \log\left(n(n-1)\cdots 1\right) = \log n!
\end{aligned}$$

Betrakta differenskvoterna av $\varphi(x)$ på intervallen $[n, n+1]$, $[n+1, n+1+x]$, $[n+1, n+2]$. Konvexitet ger att vi kan använda sats 1.2.1. Vi får då

$$\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{n+1-n} \leq \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x} \leq \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n+1)}{n+2-(n+1)},$$

där

$$\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{n+1-n} = \log n! - \log(n-1)! = \log n,$$

samt

$$\varphi(n+2)-\varphi(n+1) = \log(n+1).$$

Alltså har vi att

$$\log n \leq \frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x} \leq \log(n+1).$$

Vi kan skriva om $\varphi(n+1+x)$ som

$$\begin{aligned}
\varphi(n+1+x) &= \log f((x+n)+1) \\
&= \log(x+n)f(x+n) \\
&= \log(x+n)((x+n)-1)\cdots(x+1)f(x+1) \\
&= \log(x+n)((x+n)-1)\cdots(x+1)xf(x) \\
&= \log\Big[\underbrace{x(x+1)\cdots(x+n)}_{t}\Big] + \varphi(x).
\end{aligned}$$

Vi har alltså

$$\begin{aligned}
\log n \leq \frac{\varphi(x)+\log t - \log n!}{x} &\leq \log(n+1) \\
0 \leq \varphi(x) + \log t - [\log n! + x\log n] &\leq x\log(n+1) - x\log n \\
0 \leq \varphi(x) - [\log(n!\cdot n^x) - \log t] &\leq x\log\frac{n+1}{n} \\
0 \leq \varphi(x) - \left(\log\frac{n!\cdot n^x}{t}\right) &\leq x\log\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Låter vi $n \to \infty$ går uttrycket $\varphi(x) - \left(\log \frac{n! \cdot n^x}{t}\right)$ mot noll enligt instängningsregeln för gränsvärden (se t.ex [5] s. 141). Detta ger att

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \log \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \log \lim_{n \to \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Alltså har vi att

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

och f är då entydligt bestämt. $\square$

Anmärkning 1.3.1. Som en konsekvens leder denna sats till en alternativ formulering av Γ-funktionen:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

1.4 Betafunktionen

I detta avsnitt kommer vi att presentera betafunktionen, samt visa den som kvoter av Γ-funktionen. Betafunktionen har, precis som Γ-funktionen, sitt ursprung från Euler och hans så kallade första integral [2] som ni kan se nedan.

$$\int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$

Vi skriver dock fördelaktigt om betafunktionen, såsom vi visar i definitionen nedan.

Definition 1.4.1. För $x > 0$ och $y > 0$ definierar vi

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\; dt$$

.

Vi vill även visa att betafunktionen är konvergent. Då $x \geq 1$ och $y \geq 1$ samtidigt inses lätt att integralen är konvergent, vi väljer att betrakta intervallen $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

$$B(x,y) = B_1(x,y) + B_2(x,y) = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\; dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\; dt.$$

Vi har att $\lim_{t \to 0^+} \left(\frac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{t^{x-1}}\right) = 1$ och eftersom $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\, dt$ är konvergent enligt [4] har vi att B_1 är konvergent. Analogt visar man att B_2 är konvergent, alltså är betafunktionen konvergent.

Sats 1.4.1. *Om $x > 0$ och $y > 0$ gäller att*

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{1.6}$$

Då detta bevis är relativt omfattande har vi för läsarens skull valt att dela upp det i fyra steg, där vi i de tre första stegen kommer att visa några viktiga egenskaper för betafunktionen. I steg 1 kommer vi visa att $B(1,y) = \frac{1}{y}$ och sedan i steg 2 kommer vi, med hjälp av partiell integration, att visa att $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$. Vi fortsätter sedan i steg 3 med att visa att $\log B(x,y)$ är konvex, och precis som i sats 1.2.2 kommer vi att använda oss av Hölders olikhet. Avslutningsvis kommer vi att visa att kriterierna i sats 1.3.2 gäller.

Bevis. **Steg 1:** Till att börja med vill vi visa att $B(1,y) = \frac{1}{y}$:

$$B(1,y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1}\,dt = \left[\frac{(1-t)^y}{y}\right]_1^0 = \frac{1}{y}$$

Steg 2: Vi ska nu visa att

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

För att visa detta använder vi oss av partiell integration:

$$\begin{aligned}
B(x+1,y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^x}{(1-t)^x}(1-t)^x(1-t)^{y-1}\,dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\,dt \\
&= \left[-\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\frac{x}{(1-t)^2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} dt \\
&= \left[-t^x\frac{(1-t)^y}{x+y}\right]_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x+y-x-1}\,dt \\
&= 0 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \\
&= \frac{x}{x+y}\cdot B(x,y)
\end{aligned}$$

Steg 3: För att visa att $\log B(x,y)$ är konvex använder vi oss av samma metod som i sats 1.2.2. För ett fixt y har vi

$$B(\theta x + (1-\theta)z, y) = B\left(\frac{x}{p} + \frac{z}{q}, y\right)$$

där vi, som tidigare, använt oss av att $p = \frac{1}{\theta}$, $1-\theta = \frac{1}{q}$ och $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Vi får då

$$
\begin{aligned}
B\left(\frac{x}{p} + \frac{z}{q}, y\right) &= \int_0^1 t^{\frac{x}{p}+\frac{z}{q}-1} (1-t)^{y-1}\, dt \\
&= \int_0^1 t^{\frac{x}{p}+\frac{z}{q}-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} (1-t)^{\frac{y}{p}+\frac{y}{q}-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\, dt \\
&= \int_0^1 \underbrace{t^{\frac{x}{p}-\frac{1}{p}}(1-t)^{\frac{y}{p}-\frac{1}{p}}}_{f} \cdot \underbrace{t^{\frac{z}{q}-\frac{1}{q}}(1-t)^{\frac{y}{q}-\frac{1}{q}}}_{g}\, dt \\
&= \int_0^1 fg\, dt
\end{aligned}
$$

Hölders olikhet ger oss

$$
\int_0^1 fg\, dt \leq \left(\int_0^1 |f|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
$$

Logaritmerar vi bägge led får vi

$$
\begin{aligned}
\log B\left(\frac{x}{p} + \frac{z}{q}, y\right) &\leq \frac{1}{p}\log\int_0^1 |f|^p\, dt + \frac{1}{q}\log\int_0^1 |g|^q\, dt \\
&= \frac{1}{p}\log\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt + \frac{1}{q}\log\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{y-1}\, dt \\
&= \frac{1}{p}\log B(x,y) + \frac{1}{q}\log B(z,y).
\end{aligned}
$$

Steg 4: Vi behöver nu verifiera att de tre kriterierna i sats 1.3.2 uppfylls av funktionen som definieras

$$
f(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x,y).
$$

Vi har att

$$
\begin{aligned}
&f(x+1) = \frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(y)} B(x+1,y) = \frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \cdot \frac{x}{x+y} \cdot B(x,y) \\
&= x f(x).
\end{aligned}
$$

Vidare har vi att

$$
f(1) = \frac{\Gamma(y+1)B(1,y)}{\Gamma(y)} = \frac{y\Gamma(y)B(1,y)}{\Gamma(y)} = y \cdot \frac{1}{y} = 1.
$$

För att visa att $\log f(x)$ är konvex gör vi observationen

$$
\log f(x) = \log\Gamma(x+y) - \underbrace{\log\Gamma(y)}_{\text{konstant}} + \log B(x,y).
$$

Vi vill visa att $\log\Gamma(x+y) - \log\Gamma(y) + \log B(x,y)$ är konvex då vi har y fixt. Sätt $h(x) = \log\Gamma(x+y) - \log\Gamma(y) + \log B(x,y)$. Vi vet att $\log\Gamma(x+y)$ och $\log B(x,y)$ är konvexa funktioner. Detta ger oss att

$$h''(x) = \underbrace{(\log\Gamma(x+y))''}_{>0} + \underbrace{(\log B(x,y))''}_{>0} > 0.$$

Enligt Korollarium 1.2.1 gäller att en funktion är strängt konvex om och endast om andraderivatan är positiv, alltså är $\log f(x)$ är konvex.

Detta tvingar funktionen $f(x)$ att vara lika med $\Gamma(x)$, och beviset är klart. $\square$

Vi ger exempel på några intressanta resultat som vi använder betafunktionen till att beräkna:

Exempel 1.4.1. Variabelbytet i $t = \sin^2\theta$ i definition 1.4.1 ger oss

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-2}(\cos\theta)^{2y-2} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\, d\theta. \end{aligned}$$

Om vi nu sätter $x = y = \frac{1}{2}$ får vi att

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \pi \Longleftrightarrow \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Av detta följer att $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)!$.

För att beräkna fakulteter av typen $n + 1/2$ där $n = 0, 1, 2, \ldots$ använder vi följande formel:

Exempel 1.4.2. Låt $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m}\, dx$ och $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{2m}\, dx$. Om vi använder samma substitution som i exempel 1.4.1 har vi att

$$\begin{aligned} 2I &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m}\, dx \\ &= \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} \\ &= \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

För integralen J har vi:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^{2m}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x \cos x)^{2m}\, dx \\
&= 2^{2m-1} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m} (\cos x)^{2m}\, dx \\
&= 2^{2m-1} B(m+\tfrac{1}{2}, m+\tfrac{1}{2}) \\
&= 2^{2m-1} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(2m+1)} \\
&= 2^{2m-1} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})^2}{\Gamma(2m+1)}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Om vi dessutom för integralen J gör variabelbytet $t = 2x$ får vi

$$\begin{aligned}
J &= \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin t)^{2m}\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2m}\, dt \\
&= I.
\end{aligned}$$

Tillsammans ger ekvationerna (1.7) och (1.8)

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2\ \Gamma(m+1)} &= 2^{2m-1} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})^2}{\Gamma(2m+1)} \\
\frac{(2m)!\sqrt{\pi}}{2^{2m}(m)!} &= \Gamma(m+\tfrac{1}{2}) \\
\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) &= \frac{(2m)!\ \sqrt{\pi}}{4^m\ m!}.
\end{aligned}$$

Om vi gör substitutionen $2m = n$ får vi även

$$\begin{aligned}
\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) &= \frac{(2m)!\ \sqrt{\pi}}{4^m\ m!} \\
m! &= \frac{(2m)!\sqrt{\pi}}{4^m \Gamma(m+\frac{1}{2})} \\
m\Gamma(m) &= \frac{2m\Gamma(2m)\sqrt{\pi}}{2^{2m}\Gamma(m+\frac{1}{2})} \\
\Gamma(m) &= \frac{\Gamma(2m)\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}\Gamma(m+\frac{1}{2})} \\
\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) &= \frac{\Gamma(n)\sqrt{\pi}}{2^{n-1}\Gamma(\frac{n+1}{2})}
\end{aligned}$$

Kapitel 2

Asymptotiskt beteende av Γ-funktionen

Här tänker vi gå in på asymptotiskt beteende av Γ-funktionen. En formel som ofta dyker upp i dessa sammanhang är Stirlings formel som används till att approximera $n!$ då n är stort. Vi kommer även titta på kvoter av Γ-funktioner och hur de beter sig asymptotiskt.

2.1 Stirlings formel

Härnäst kommer vi att formulera en approximation för stora fakulteter. Den så kallade Stirlings formel, eller Stirlings approximation, hjälper oss att approximera $n!$ för stora n, eller $\Gamma(x+1)$ för stora x. Innan vi kan presentera Stirlings formel måste dock vi definiera begreppet asymptotiskt beteende.

Definition 2.1.1. Låt $f(x), g(x)$ vara reellvärda funktioner. Om

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

skriver vi $f(x) \sim g(x)$ då $x \to \infty$. Vi säger att att f *är asymptotisk till* g. Detta begrepp används då vi känner till storlek och uppförande av $g(x)$ då $x \to \infty$ och vill se hur $f(x)$ beter sig under samma förhållande.

För att visa Stirlings formel behöver vi vissa verktyg i form av ett lemma och en sats. Dessa, samt Stirlings formel, går att finna i [3] (lemma 18.3a s. 516, sats 18.3b s. 516, sats 18.4 s. 520) varifrån vi även tagit bevisidéerna som vi för läsaren skull skrivit om och förenklat något.

Lemma 2.1.1. *Om $a > 0$, $b > 0$ och om f är definierad som*

$$f(x) = \int_0^a e^{-xbt^2}\, dt,$$

är

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{bx}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad då \quad x \to \infty$$

Bevis. Sätt $u = t\sqrt{bx}$, då är $dt = \frac{1}{\sqrt{bx}}\,du$. Då är

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{bx}}} &= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{bx}}}\int_0^{a\sqrt{bx}} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{bx}}\,du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a\sqrt{bx}} e^{-u^2}\,du.\end{aligned}$$

Vi har att integralen $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du$ är konvergent med värdet $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (se exempel (3.1.2)) och vi får att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{bx}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

$\square$

Följande procedur kallas för *Laplaces metod* (se [3]) och är en teknik som används för att approximera integraler på formen $\int_a^b e^M f(x)\,dx$.

Sats 2.1.1. *Antag att följande gäller:*

(a) *f är två gånger deriverbar och f'' kontinuerlig på $0 \leq t < a$, där a får vara ändlig eller oändlig;*

(b) *f är växande på $0 \leq t < a$;*

(c) $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$;

(d) *det finns ett x_0, för vilket*

$$I(x_0) = \int_0^a e^{-x_0 f(t)}\,dt$$

existerar.

Då gäller att $I(x)$ existerar för alla $x > x_0$ och

$$I(x) \sim \left[\frac{\pi}{2xf''(0)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

då $x \to \infty$.

Bevis. Vi ser att för $x > x_0$ gäller $e^{-xf(t)} \leq e^{-x_0 f(t)}$. Enligt jämförelsesats [5] har vi att $I(x)$ existerar. Välj ett ε, sådant att $0 < \varepsilon < f''(0)$. Eftersom $f''(0)$ är kontinuerlig finns ett $\delta < a$, för vilket

$$0 < f''(0) - \varepsilon \leq f''(t) \leq f''(0) + \varepsilon, \quad \text{om} \quad 0 \leq t \leq \delta. \tag{2.1}$$

Då har vi

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^a e^{-xf(t)}\,dt \\ &= \int_0^\delta e^{-xf(t)}\,dt + \int_\delta^a e^{-xf(t)}\,dt \\ &= I_1(x) + I_2(x). \end{aligned}$$

Vi börjar med att undersöka I_2. På $\delta \leq t < a$ har vi att $f(t) \geq f(\delta)$, eftersom f är monoton. Vi har

$$e^{-xf(t)} = e^{-xf(t)/2}e^{-xf(t)/2} \leq e^{-xf(t)/2}e^{-xf(\delta)/2} \leq e^{-x_0 f(t)}e^{-xf(\delta)/2},$$

då $x \geq 2x_0$. Av detta följer att

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \int_\delta^a e^{-xf(t)}\,dt \\ &\leq e^{-xf(\delta)/2}\int_\delta^a e^{-x_0 f(t)}\,dt \\ &\leq e^{-xf(\delta)/2}\int_0^a e^{-x_0 f(t)}\,dt, \end{aligned}$$

eller ekvivalent

$$0 \leq I_2(x) \leq e^{-xf(\delta)/2} I(x_0). \tag{2.2}$$

Om vi vidare ser på $0 \leq t \leq \delta$ och MacLaurinutvecklar $f(t)$ (se [5]) får vi att

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(\tau)t^2}{2},$$

där $0 \leq \tau \leq t \leq \delta$. Eftersom $f(0) = f'(0) = 0$ har vi att

$$f(t) = \frac{f''(\tau)t^2}{2}.$$

Av detta och av (2.1) får vi att

$$\frac{(f''(0) - \varepsilon)t^2}{2} \leq f(t) \leq \frac{(f''(0) + \varepsilon)t^2}{2},$$

så att

$$e^{-x(f''(0)+\varepsilon)t^2/2} \leq e^{-xf(t)} \leq e^{-x(f''(0)-\varepsilon)t^2/2}.$$

Integrerar vi denna olikhet får vi

$$\int_0^\delta e^{-x(f''(0)+\varepsilon)t^2/2}\,dt \le I_1(x) \le \int_0^\delta e^{-x(f''(0)-\varepsilon)t^2/2}\,dt. \tag{2.3}$$

Vi kombinerar (2.2) och (2.3) och får

$$\int_0^\delta e^{-x(f''(0)+\varepsilon)t^2/2}\,dt \le I(x) \le \int_0^\delta e^{-x(f''(0)-\varepsilon)t^2/2}\,dt + e^{-xf(\delta)/2}I(x_0), \tag{2.4}$$

för $x \ge 2x_0$. Multiplicerar vi sedan (2.4) med $\sqrt{x}$ får vi

$$\sqrt{x}\int_0^\delta e^{-x(f''(0)+\varepsilon)t^2/2}\,dt \le \sqrt{x}I(x) \le \sqrt{x}\int_0^\delta e^{-x(f''(0)-\varepsilon)t^2/2}\,dt + \sqrt{x}e^{-xf(\delta)/2}I(x_0).$$

För att lättare se vad vi gör inför vi beteckningarna $b_1 = \frac{f''(0)+\varepsilon}{2}$ och $b_2 = \frac{f''(0)-\varepsilon}{2}$. Då har vi

$$\sqrt{x}\int_0^\delta e^{-xb_1t^2}\,dt \le \sqrt{x}I(x) \le \sqrt{x}\int_0^\delta e^{-xb_2t^2}\,dt + \sqrt{x}e^{-xf(\delta)/2}I(x_0). \tag{2.5}$$

Om vi nu låter $x \to \infty$ får vi att $\sqrt{x}e^{-xf(\delta)/2}I(x_0) \to 0$. Enligt lemma 2.1.1 kan vi även approximera (2.5) och får då

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}\int_0^\delta e^{-xb_1t^2}\,dt &\sim \frac{\sqrt{x}}{2}\left[\frac{\pi}{b_1x}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{2}\left[\frac{\pi}{\frac{f''(0)+\varepsilon}{2}x}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{f''(0)+\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}\int_0^\delta e^{-xb_2t^2}\,dt &\sim \frac{\sqrt{x}}{2}\left[\frac{\pi}{b_2x}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{2}\left[\frac{\pi}{\frac{f''(0)-\varepsilon}{2}x}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{f''(0)-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Av detta samt (2.5) får vi att det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett C så att, för $x > C$ gäller

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{f''(0)+\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{x}I(x) \le \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{f''(0)-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Då $\varepsilon \to 0$ följer $\sqrt{x} I(x) \to \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{f''(0)}\right]^{\frac{1}{2}}$
Detta ger

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I(x)}{\left[\frac{\pi}{2xf''(0)}\right]^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} I(x)}{\frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{f''(0)}\right]^{\frac{1}{2}}} = 1,$$

och beviset är färdigt. □

Sats 2.1.2 (Stirlings formel). *För stora x har vi*

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$$

Bevis. För uttrycket $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$ gör vi variabelbytet $t = x(1+u)$. Då är $dt = xdu$ och vi får

$$\Gamma(x+1) = \int_{-1}^{\infty} x^x (1+u)^x e^{-x(1+u)} x\, du = x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{\infty} e^{-ux} (1+u)^x\, du$$

eller ekvivalent

$$\begin{aligned} x^{-x-1} e^x \Gamma(x+1) &= \int_{-1}^{\infty} e^{-ux}(1+u)^x\, du \\ &= \int_{-1}^{0} e^{-ux}(1+u)^x\, du + \int_0^\infty e^{-ux}(1+u)\, du \\ &= I_1(x) + I_2(x) \end{aligned}$$

Vi betraktar först I_1 :

$$I_1(x) = \int_{-1}^{0} e^{-ux}(1+u)^x\, du = \int_0^1 e^{ux}(1-u)^x\, du = \int_0^1 e^{-x[-u-\ln(1-u)]}\, dt.$$

Sätt $f(u) = -u - \ln(1-u)$. Då är

$$f'(u) = -1 + \frac{1}{1-u} = \frac{u}{1-u} \geq 0 \quad \text{då} \quad 0 \leq u < 1$$

och

$$f''(u) = \frac{1}{(1-u)^2} \geq 0, \quad 0 \leq u < 1.$$

Speciellt är $f(0) = f'(0) = 0$ och $f''(0) = 1$ och vi kan tillämpa sats 2.1.1 och få

$$I_1(x) \sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Med samma förfarande tillämpat på $I_2(x)$ med $f(u) = u - \ln(1+u)$ får vi

$$I_2(x) \sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vilket tillsammans ger

$$I(x) \sim 2\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

vilket ger

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x}.$$

□

2.2 Pochhammersymbolen

I detta avsnitt presenterar vi Pochammersymbolen $(\alpha)_n$ och kollar på dess asymptotiska beteende. Vi gör följande definition:

Definition 2.2.1. Låt n vara ett naturligt tal och α reellt, då gäller

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

Uttryckt i gammafunktioner får vi:

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.6}$$

Med Stirlings formel får vi även den nedanstående asymptotiska formeln.

Lemma 2.2.1.

$$\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n} \sim C(\alpha,\beta)(n+1)^{\alpha-\beta} \tag{2.7}$$

där $C(\alpha,\beta)$, för fixa värden på α och β, är en konstant.

Bevis. Vi skriver om $\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}$ med hjälp av (2.6) och använder Stirlings formel med $x_1 = n+\alpha-1$ och $x_2 = n+\beta-1$ får vi att

$$\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+\beta)} \sim \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{(n+\alpha-1)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}e^{1-n-\alpha}}{(n+\beta-1)^{n+\beta-\frac{1}{2}}e^{1-n-\beta}}.$$

Vi sätter nu $C = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{\beta-\alpha}$ och skriver om resten av uttrycket

$$\frac{(n+\alpha-1)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}}{(n+\beta-1)^{n+\beta-\frac{1}{2}}} = \frac{(n+\alpha-1)^{\alpha}}{(n+\beta-1)^{\beta}}\left(\frac{n+\alpha-1}{n+\beta-1}\right)^{n}\left(\frac{n+\alpha-1}{n+\beta-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Låt oss se hur de enskilda faktorerna beter sig för stora n. För faktorn längst till höger gäller det att

$$\left(\frac{n+\alpha-1}{n+\beta-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{\alpha-\beta}{n+\beta-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \to 1 \quad \text{då} \quad n \to \infty.$$

Faktorn i mitten gör vi substitutionen $t = n + \beta - 1$ och får

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+\alpha-1}{n+\beta-1}\right)^n &= \left(1 + \frac{\alpha-\beta}{n+\beta-1}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{\alpha-\beta}{t}\right)^{1+t-\beta} \\
&= \left(1 + \frac{\alpha-\beta}{t}\right)^t \left(1 + \frac{\alpha-\beta}{t}\right)^{1-\beta} \\
&\to \quad e^{\alpha-\beta} \cdot 1 \quad \text{då} \quad t \to \infty.
\end{aligned}$$

Vi gör sedan en omskrivning på faktorn $\frac{(n+\alpha-1)^\alpha}{(n+\beta-1)^\beta}$.

$$\frac{(n+\alpha-1)^\alpha}{(n+\beta-1)^\beta} = \frac{\left(\frac{n+\alpha-1}{n+1}\right)^\alpha (n+1)^\alpha}{\left(\frac{n+\beta-1}{n+1}\right)^\beta (n+1)^\beta} = \frac{\left(\frac{n+\alpha-1}{n+1}\right)^\alpha}{\left(\frac{n+\beta-1}{n+1}\right)^\beta} (n+1)^{\alpha-\beta}$$

där vi ser att ena faktorn går mot 1 då $n \to \infty$. Tillsammans får vi att

$$\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n} \sim C\,(n+1)^{\alpha-\beta}\, e^{\alpha-\beta} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\,(n+1)^{\alpha-\beta}.$$

Vi har alltså att

$$\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n} \sim C(\alpha,\beta)\,(n+1)^{\alpha-\beta}$$

där konstanten $C(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}$ $\square$

Kapitel 3

Area och volym i n dimensioner

I detta kapitel visar vi att Γ-funktionen dyker upp i formlerna för area och volym för klot i n dimensioner. Med en yta avser vi randen till den begränsade mängden $K \in \mathbf{R}^n$ och den brukar i litteraturer [6] betecknas med ∂K men i denna text kommer vi bara studera sfären och klotet, som vi definierar lite längre ner. Notera att vi endast studerar mängder i $\mathbf{R}^n$ och en yta har alltså en dimension lägre än den kropp vi studerar oavsett vilken dimension vi befinner oss i. När vi talar om area så associerar vi alltså ett tal σ som är ett mått på innehållet av den yta vi studerar och analogt för volym. Längre fram kommer vi även använda n-polära koordinater som en definition, för härledning av dessa hänvisar vi den intresserade läsaren till [1] där läsaren förväntas ha grundläggande kunskaper i linjär algebra.

I $\mathbf{R}^n$ betecknar vi klotet som är centrerat i origo med radie R som $K_n(R)$ och den utgörs av mängden $K_n(R) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| < R\}$. Randen till $K_n(R)$ kallas $(n-1)$-sfären och definieras som $S_{n-1}(R) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n-1} : \|\boldsymbol{x}\| = R\}$. För enhetsklotet $K_n(1)$ skriver vi bara K_n och analogt för enhetssfären, S_n. Arean och volyminnehållet av K_n betecknar vi med $\sigma(S_n)$ respektive $\mu(K_n)$.

3.1 Polära koordinater

I detta avsnitt definierar vi n-polära koordinater som vi kommer använda till att beräkna integralen

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|\boldsymbol{x}|^2}\, d\boldsymbol{x}, \tag{3.1}$$

där vi noterar att integranden är en funktionen som beror på avståndet från origo. Vi kommer använda denna integral lite längre fram när vi härleder formlerna för area och volym i n dimensioner men först behöver vi göra följande definitioner:

Definition 3.1.1. Låt $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-2}$, samt θ vara vinklar där $0 \leq \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-2} \leq \pi$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Om r är radien till en $(n-1)$-sfär i $\mathbf{R}^n$ kan vi få fram de polära koordinaterna genom

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\phi_1 \\
&\vdots \\
x_j &= r\cos\phi_j \cdot \prod_{k=1}^{j-1}\sin\phi_k \qquad (j = 2, 3, \ldots, n-2) \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r\sin\theta \cdot \prod_{k=1}^{n-2}\sin\phi_k \\
x_n &= r\cos\theta \cdot \prod_{k=1}^{n-2}\sin\phi_k
\end{aligned}$$

Definition 3.1.2. För en $(n-1)$ -sfär i $\mathbf{R}^n$ kan vi få fram jacobianen genom

$$J(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-2}) = r^{n-1}\prod_{k=1}^{n-2}\sin^k\phi_{n-k-1}$$

Vi visar några exempel:

3.1.1 Exempel

Exempel 3.1.1. Vi vill få fram de polära koordinaterna för en sfär i $\mathbf{R}^4$ och använder oss då av definition 3.1.1. Vi får

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\phi_1 \\
x_2 &= r\cos\phi_2 \cdot \prod_{k=1}^{2}\sin\phi_k = r\cos\phi_2\sin\phi_1 \\
x_3 &= r\sin\theta \cdot \prod_{k=1}^{2}\sin\phi_k = r\sin\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 \\
x_4 &= r\cos\theta \cdot \prod_{k=1}^{2}\sin\phi_k = r\cos\theta\sin\phi_1\sin\phi_2
\end{aligned}$$

Om vi nu vill få fram jacobianen för dessa polära koordinater använder vi oss av definition 3.1.2 som ger oss

$$\begin{aligned}
J(r, \phi_1, \phi_2) &= r^3\prod_{k=1}^{2}\sin^k\phi_{3-k} \\
&= r^3\sin^2\phi_1\sin\phi_2
\end{aligned}$$

I tre variabler är vi redan bekanta med jakobianen

$$J(r, \phi_1) = r^2 \sin \phi_1$$

Exempel 3.1.2.

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_D e^{-r^2} |J(r, \phi_1)|\, dr\, d\phi_1\, d\theta \quad (3.2)$$

$$= \int_0^\infty r^2 e^{-r^2}\, dr \int_0^\pi \sin \phi_1\, d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\theta, \quad (3.3)$$

där D är området vid övergång till polära koordinater som ges av 3.1.1. Vi utför variabelbytet $r^2 = t$ där $dt = 2rdr$ och får då

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t}\, dt \cdot 4\pi = 2\pi \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \pi^{\frac{3}{2}},$$

I $\mathbf{R}^4$ har vi

$$\begin{aligned} &\iiiint_{\mathbf{R}^4} e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \quad (3.4)\\ &= \iiiint_D e^{-r^2} |J(r, \phi_1, \phi_2)|\, dr\, d\phi_1\, d\phi_2\, d\theta \\ &= \int_0^\infty r^3 e^{-r^2}\, dr \int_0^\pi \sin^2 \phi_1\, d\phi_1 \int_0^\pi \sin \phi_2\, d\phi_2 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{4}{2}-1} e^{-t}\, dt \cdot 2\pi^2 \\ &= \pi^2 \Gamma\left(\frac{4}{2}\right) = \pi^2. \end{aligned}$$

Eftersom variablerna $x_1, \ldots, x_n$ är oberoende varandra får vi att

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|\boldsymbol{x}|^2}\, d\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x_1^2}\, dx_1 \ldots \int_{-\infty}^\infty e^{-x_n^2}\, dx_n = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

Det verkar som att vid beräkning av integralen (3.1) erhåller vi en produkt av Γ-funktionen samt arean av enhetssfären. Med dessa resultat verkar det därför rimligt att definiera arean av enhetssfären enligt nedan:

Definition 3.1.3. Låt D vara området som definieras i 3.1.1. Vi definierar arean av $(n-1)$-sfären som

$$\sigma(S_{n-1}) = \int \cdots \int_D |\tilde{J}|\, dr d\phi_1 \cdots d\phi_{n-2}\, d\theta,$$

där $|J| = r^{n-1} |\tilde{J}|$.

3.2 Volym och ytarea av n-dimensionella klot

Sats 3.2.1. *Volymen för det n-dimensionella enhetsklotet K_n och ytarean av S_{n-1} ges av*

$$\mu(K_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{3.5}$$

samt

$$\sigma(S_{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \tag{3.6}$$

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned}
\pi^{\frac{n}{2}} &= \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|\boldsymbol{x}|^2}\, d\boldsymbol{x} = \underset{D}{\int \cdots \int} e^{-r^2} |J|\, dr \cdots d\phi_{n-2}\, d\theta \\
&= \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr\, \sigma\left(S_{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\, dt \sigma\left(S_{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma\left(S_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Av detta får vi att

$$\sigma\left(S_{n-1}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Om vi betecknar volymen av $K_n(R)$ som $V_n(R)$ så kan vi tänka oss att $V_n(R)$ utgörs av koncentriska skal med tjockleken Δr som vi summerar från 0 till R. Ett tunt skal av $V_n(R)$ kan då approximeras som

$$\Delta V_n(R) \approx A_{n-1}(R)\Delta r,$$

där $A_{n-1}(R)$ är arean av $S_{n-1}(R)$. Vi delar upp radien i små intervall $r_0 = 0, r_1, \ldots, r_N = R$ och konstanta längden $\Delta r = \frac{R}{N}$. Hela klotet kan då approximeras som en summa

$$V_n(R) \approx \sum_{k=1}^{N} A_{n-1}(r_k)\Delta r.$$

Låter vi intervallängden gå mot noll får vi volymen som en oändlig summa:

$$\begin{aligned}
V_n(R) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} A_{n-1}(r_k)\Delta r \\
&= \int_0^R A_{n-1}(r)\, dr \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

□

3.3 Volym och ytarea för några n

Vi sammanställer en tabell med värden för arean och volymen i några dimensioner. En intressant iaktagelse är att volymen (och arean) initialt ökar och når ett maxvärde vid $n = 5$ (volymen) för att sedan avta. Eftersom fakultetsfunktionen växer snabbare än exponentialfunktionen (se [5] s. 161) så kommer uttrycket (3.7) tendera mot noll dår n går mot oändligheten.

n	$A_{n-1}(R)$	$V_n(R)$
1	2	2R
2	$2\pi R \approx 6,28R$	$\pi R^2 \approx 3,14R^2$
3	$4\pi R^2 \approx 12,57R^2$	$\frac{4\pi R^3}{3} \approx 4,19R^3$
4	$2\pi^2 R^3 \approx 19,74R^3$	$\frac{\pi^2 R^4}{2} \approx 4,93R^4$
5	$\frac{8\pi^2}{3} R^4 \approx 26,32R^4$	$\frac{8\pi^2}{15} R^5 \approx 5,26R^5$
6	$\pi^3 R^5 \approx 31,00R^5$	$\frac{\pi^3 R^6}{6} \approx 5,17R^6$
7	$\frac{16\pi^3 R^6}{15} \approx 33,07R^6$	$\frac{16\pi^3 R^7}{105} \approx 4,72R^7$
8	$\frac{\pi^4}{3} R^7 \approx 32,47$	$\frac{\pi^4}{24} R^8 \approx 4,06R^8$
$\vdots$		
347	$\frac{173!\, 2^{347} \pi^{173}}{346!} R^{346}$	
	$\approx 1,28 \cdot 10^{-226} R^{346}$	

3.4 Filosofisk utläggning

Det kan verka konstigt att betrakta S_3 som en yta eftersom det är ett tredimensionellt objekt, och dess mått som area när det egentligen är en volym! Men, S_3 är ett objekt i ett fyrdimensionellt rum, $\mathbf{R}^4$; där saknar vi geometrisk tolkning. Vår uppfattning av volymer och areor är baserad på den vardagliga intuitionen av rummet och planet. Kan vi på något sätt tänka oss hur en yta i fyra dimensioner ser ut? Förmodlingen inte, men det går att tänka sig hur projektionen av ett objekt i fyra dimensioner ser ut i rummet.

Precis som att projektionen av en sfär i $\mathbf{R}^2$ blir en cirkel, får vi en sfär när S_3 projiceras ner på $\mathbf{R}^3$. Om vi skulle ta ett plan i $\mathbf{R}^4$ och dra det genom S_3 skulle vi först se en punkt när deras ytor tangerar för att sedan växa till en tredimensionell sfär och nå sitt max vid 'ekvatorn' och sedan avta till en punkt igen.

Litteraturförteckning

[1] Blumeson, I.E: *A Derivation of n-Dimensional Spherical Coordinates*, The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America, Vol 67, no 1, 63 - - 66, 1960 .

[2] Davis, Philip J.: *Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function*, The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America, Vol 66, No 10, 849 - - 869, 1959.

[3] Fulks, Watson: *Advanced Calculus*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 2010.

[4] Neymark, Mats: *Kompendium om konvergens (andra upplagan)*, Linköpings universitet, Matematiska institutionen, 2000.

[5] Persson, Arne och Böiers, Lars-Christer: *Analys i en variabel*, Studentlitteratur, 2010.

[6] Persson, Arne och Böiers, Lars-Christer: *Analys i flera variabler*, Studentlitteratur, 2005.

[7] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.